De $\mathbb{C}$ à $\mathbb{R}$

Michel Coste

18 Septembre 2009

Le but de ce texte est d'expliquer comment passer du théorème de réduction pour les endomorphismes normaux d'un espace hermitien à divers théorèmes de réduction sur $\mathbb{R}$. On part du théorème suivant :

Théorème 1 *Tout endomorphisme normal f d'un espace hermitien diagonalise dans une base orthonormée (b.o.n.).*

La démonstration de ce théorème est simple, en voici un raccourci. Un endomorphisme normal f vérifie que, pour tout x, $\|f^*(x)\| = \|f(x)\|$, donc $\ker(f^*) = \ker(f)$ et donc $\ker(f^* - \overline{\lambda}\,\mathrm{Id})) = \ker(f - \lambda\,\mathrm{Id})$ puisque $f - \lambda\,\mathrm{Id}$ est aussi normal. Si x est un vecteur propre pour f de valeur propre associée λ, alors c'est aussi un vecteur propre pour f^* de valeur propre associée $\overline{\lambda}$. Par conséquent $x^\perp$ est un hyperplan stable à la fois par f et f^* et la restriction de f à $x^\perp$ est un endomorphisme normal. Une récurrence facile permet de conclure.

La réciproque de l'affirmation du théorème se vérifie aisément. Le théorème et sa réciproque ont les cas particuliers suivants.

- Les endomorphismes hermitiens sont ceux qui diagonalisent en b.o.n. à valeurs propres réelles.
- Les endomorphismes unitaires sont ceux qui diagonalisent en b.o.n. à valeurs propres de module 1.
- Les endomorphismes antihermitiens sont ceux qui diagonalisent en b.o.n. à valeurs propres imaginaires pures.

On veut déduire du théorème 1 les théorèmes de réduction sur $\mathbb{R}$ qui suivent.

Théorème 2 *Tout endomorphisme symétrique d'un espace euclidien diagonalise dans une b.o.n..*

Soit θ un réel non multiple de π, ρ un réel > 0, $\mu = \rho\, e^{i\theta}$. On note

$$R_\theta = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \qquad S_\mu = \rho\, R_\theta = \begin{pmatrix} \Re(\mu) & -\Im(\mu) \\ \Im(\mu) & \Re(\mu) \end{pmatrix}$$

(respectivement la matrice de rotation d'angle θ et la matrice de similitude directe d'angle θ et de rapport ρ). Soit a un nombre réel non nul ; on note

$$A_a = \begin{pmatrix} 0 & -a \\ a & 0 \end{pmatrix} .$$

Théorème 3 *Soit f un endomorphisme normal d'un espace euclidien E. Alors il existe une b.o.n. de E dans laquelle la matrice de f est de la forme*

$$\begin{pmatrix} D & 0 & \dots & 0 \\ 0 & S_{\mu_1} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & S_{\mu_r} \end{pmatrix},$$

où D est une matrice diagonale (éventuellement de taille 0) et $\mu_1, \dots, \mu_r$ des nombres complexes non réels.

Théorème 4 *Soit f un endomorphisme orthogonal d'un espace euclidien E. Alors il existe une b.o.n. de E dans laquelle la matrice de f est de la forme :*

$$\begin{pmatrix} I_p & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & -I_q & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & R_{\theta_1} & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & R_{\theta_r} \end{pmatrix},$$

où p et q sont des entiers naturels et $\theta_1, \dots, \theta_r$ des réels non multiples de π.

Théorème 5 *Soit f un endomorphisme antisymétrique d'un espace euclidien E. Alors il existe une b.o.n. de E dans laquelle la matrice de f est de la forme*

$$\begin{pmatrix} 0_p & 0 & \dots & 0 \\ 0 & A_{a_1} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & A_{a_r} \end{pmatrix},$$

où 0_p est la matrice nulle de taille $p \geq 0$ et $a_1, \dots, a_r$ des nombres réels non nuls.

Les réciproques des affirmations des trois théorèmes précédents se vérifient aisément.

Quitte à choisir une b.o.n. de E, on se placera pour ce qui suit dans le cas $E = \mathbb{R}^n$ muni de la structure euclidienne standard, qu'on plonge dans $\mathbb{C}^n$ muni de la structure hermitienne standard ; bien sûr, une famille de vecteurs de $\mathbb{R}^n$ est orthonormale dans $\mathbb{R}^n$ si et seulement si elle est orthonormale dans $\mathbb{C}^n$. On identifie un endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ à sa matrice, et de cette manière un endomorphisme f de $\mathbb{R}^n$ s'étend en un endomorphisme $f_{\mathbb{C}}$ de $\mathbb{C}^n$, qui a même matrice.

Soit λ une valeur propre réelle de f (et donc aussi de f_C). On note $E(\lambda) \subset \mathbb{R}^n$ et $E_{\mathbb{C}}(\lambda) \subset \mathbb{C}^n$ les sous-espaces propres associés à la valeur propre λ pour f et $f_{\mathbb{C}}$ respectivement. On a $\dim_{\mathbb{R}} E(\lambda) = \dim_{\mathbb{C}} E_{\mathbb{C}}(\lambda)$ puisque ces deux dimensions sont égales à n moins le rang de la matrice réelle $\lambda\, I_n - f$. Une b.o.n. de $E(\lambda)$ est donc aussi une b.o.n. (sur $\mathbb{C}$) de $E_{\mathbb{C}}(\lambda)$, formée de vecteurs réels.

Soit maintenant f un endomorphisme symétrique de $\mathbb{R}^n$. Alors $f_\mathbb{C}$ est hermitien et d'après le théorème 1 on a une décomposition en somme directe orthogonale

$$\mathbb{C}^n = E_\mathbb{C}(\lambda_1) \overset{\perp}{\oplus} \cdots \overset{\perp}{\oplus} E_\mathbb{C}(\lambda_s) \ ,$$

où $\lambda_1, \ldots, \lambda_s$ sont les valeurs propres réelles de f. Choisissons une b.o.n. $\mathcal{E}_k$ de $E(\lambda_k)$; c'est aussi une b.o.n. (sur $\mathbb{C}$) de $E_C(\lambda_k)$ et donc les bases $\mathcal{E}_k$ mises bout à bout forment une famille orthonormale de n vecteurs propres réels. Ceci montre que f diagonalise bien en b.o.n. sur $\mathbb{R}$. Le théorème 2 est démontré.

Passons maintenant au cas où f est un endomorphisme normal de $\mathbb{R}^n$, et donc $f_\mathbb{C}$ un endomorphisme normal de $\mathbb{C}^n$. Puisque la matrice f est réelle, l'ensemble de ses valeurs propres dans $\mathbb{C}$ est stable par conjugaison et est donc de la forme

$$\{\lambda_1, \ldots, \lambda_s, \mu_1, \overline{\mu_1}, \ldots, \mu_t, \overline{\mu_t}\}$$

où les λ_k sont réels et les μ_j complexes non réels. D'après le théorème 1 on a une décomposition en somme directe orthogonale

$$\mathbb{C}^n = \left(\overset{\perp}{\bigoplus}_{k=1,\ldots,s} E_\mathbb{C}(\lambda_k) \right) \overset{\perp}{\oplus} \left(\overset{\perp}{\bigoplus}_{j=1,\ldots,t} (E_\mathbb{C}(\mu_j) \overset{\perp}{\oplus} E_\mathbb{C}(\overline{\mu_j})) \right) \ .$$

On sait déjà trouver une b.o.n. de $E_\mathbb{C}(\lambda_k)$ formée de vecteurs réels. Dans le paragraphe suivant, nous montrons comment obtenir une b.o.n. de $E_\mathbb{C}(\mu_j) \overset{\perp}{\oplus} E_\mathbb{C}(\overline{\mu_j})$ formée de vecteurs réels dans laquelle la matrice de la restriction de $f_\mathbb{C}$ est diagonale par blocs 2×2, chaque bloc étant S_{μ_j}. Ceci achèvera la démonstration du théorème 3 de réduction des endomorphismes normaux réels.

Posons $\mu = \mu_j$ pour alléger les écritures. Soit $(u_1, \ldots, u_p)$ une b.o.n. de $E_\mathbb{C}(\mu)$. Pour $x \in \mathbb{C}^n$, notons $\overline{x}$ le vecteur dont les coordonnées sont les conjuguées de celles de x ; la conjugaison préserve l'orthogonalité et la norme hermitienne. On a $x \in E_\mathbb{C}(\mu)$ si et seulement si $\overline{x} \in E_\mathbb{C}(\overline{\mu})$. Donc $(\overline{u_1}, \ldots, \overline{u_p})$ est une b.o.n. de $E_\mathbb{C}(\overline{\mu})$), et $(u_1, \overline{u_1}, \ldots, u_p, \overline{u_p})$ une b.o.n. de $E_\mathbb{C}(\mu) \overset{\perp}{\oplus} E_\mathbb{C}(\overline{\mu})$. La restriction de $f_\mathbb{C}$ au plan stable P de b.o.n. $(u_\ell, \overline{u_\ell})$ a pour matrice $\begin{pmatrix} \mu & 0 \\ 0 & \overline{\mu} \end{pmatrix}$. Posons

$$v_\ell = \sqrt{2}\, \Im(u_\ell) = \frac{u_\ell - \overline{u_\ell}}{i\sqrt{2}} \qquad w_\ell = \sqrt{2}\, \Re(u_\ell) = \frac{u_\ell + \overline{u_\ell}}{\sqrt{2}} \ .$$

Les vecteurs v_ℓ et w_ℓ sont réels, et ils forment une b.o.n. de P (la matrice de changement de base est la matrice unitaire $\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -i & 1 \\ i & 1 \end{pmatrix}$). On calcule facilement la matrice de la restriction de $f_\mathbb{C}$ dans la base (v_ℓ, w_ℓ) : c'est S_μ. On a ainsi fabriqué une b.o.n. $(v_1, w_1, \ldots, v_p, w_p)$ de $E_\mathbb{C}(\mu) \overset{\perp}{\oplus} E_\mathbb{C}(\overline{\mu})$ formée de vecteurs réels dans laquelle la matrice de la restriction de $f_\mathbb{C}$ est diagonale par blocs 2×2, chaque bloc étant S_μ.

Dans le cas où f est un endomorphisme orthogonal, alors $f_\mathbb{C}$ est unitaire et ses valeurs propres sont toutes de module 1. Les valeurs propres réelles λ_k sont ± 1, et les valeurs propres complexes μ_j sont $e^{i\theta_j}$ avec θ_j non multiple de

π, de sorte que $S_{\mu_j} = R_{\theta_j}$. On obtient ainsi le théorème 4 de réduction des endomorphismes orthogonaux.

Dans le cas où f est un endomorphisme antisymétrique, alors $f_{\mathbb{C}}$ est anti-hermitien et ses valeurs propres sont toutes imaginaires pures. La seule valeur propre réelle possible est 0, et les valeurs propres complexes μ_j sont $i\, a_j$ avec a_j réel non nul, de sorte que $S_{\mu_j} = A_{a_j}$. On obtient ainsi le théorème 5 de réduction des endomorphismes antisymétriques.

Quelques indications bibliographiques

On peut trouver les théorèmes de réduction réels énoncés ici dans pas mal d'endroits. Ils sont d'habitude démontrés directement, souvent en utilisant le fait qu'un endomorphisme d'un espace vectoriel réel de dimension finie > 0 admet au moins un sous-espace stable de dimension 1 ou 2.

Le théorème de réduction des endomorphismes symétriques réels se trouve partout. Le théorème de réduction des endomorphismes normaux réels est le théorème 4 p. 256 dans [Gou], le théorème VII.11 p. 206 dans [Gob], le théorème 3.3.1 p. 31 dans [Ser], le théorème 3.2.1 p. 159 dans [Cog]. Le théorème de réduction des endomorphismes orthogonaux est le théorème 1 p. 252 dans [Gou], le théorème VII.8 p. 197 dans [Gob], le corollaire 3.3.1 p. 31 dans [Ser], le théorème 4.0.1 p. 202 dans [Cog]. Ces théorèmes sont regroupés dans le théorème 1.6 p. 250 de [Tau].

Références

[Cog] M. Cognet : *Algèbre bilinéaire.* Bréal 2002

[Gob] R. Goblot : *Algèbre linéaire.* Ellipses 2005

[Gou] X. Gourdon : *Algèbre.* Ellipses 1994

[Ser] D. Serre : *Les matrices.* Dunod 2001

[Tau] P. Tauvel : *Mathématiques générales pour l'agrégation.* Masson 1992