

Distributions harmoniques

Bachir Bekka

April 26, 2012

Une distribution tempérée $T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ est dite *harmonique* si $\Delta T = 0$, où $\Delta = \sum_{i=1}^n \partial^2 / \partial x_i^2$ est l'opérateur de Laplace.

On rappelle qu'une fonction f mesurable sur \mathbb{R}^n est dite à croissance modérée s'il existe $k \in \mathbb{N}$ et $C > 0$ telle que $|f(x)| \leq C(1 + |x|)^k$ pour tout $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, où $|x|^2 = \sum_{j=1}^n x_j^2$; une telle fonction définit une distribution tempérée T_f par $\langle T_f, \varphi \rangle = \int_{\mathbb{R}^n} f(x)\varphi(x)dx$ pour tout $\varphi \in \mathcal{S}$. Si on a $T_f = T_g$ pour deux telles fonctions f et g , alors $f = g$ presque partout; par conséquent, si, de plus, f et g sont continues, alors $f = g$ sur \mathbb{R}^n .

On se propose de démontrer le théorème suivant.

Théorème 1 *Soit $T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ une distribution harmonique. Alors T est la distribution définie par une fonction polynômiale sur \mathbb{R}^n .*

Soit u une fonction de classe C^2 et à croissance modérée. Comme $\Delta(T_u) = T_{\Delta u}$, le corollaire suivant découle immédiatement du théorème précédent.

Corollaire 2 *Soit u une fonction sur \mathbb{R}^n de classe C^2 et à croissance modérée telle que $\Delta u = 0$. Alors u est une fonction polynômiale.*

Toute fonction polynômiale bornée sur \mathbb{R}^n étant nécessairement constante, on obtient comme conséquence le Théorème de Liouville.

Corollaire 3 (Théorème de Liouville) *Soit u une fonction sur \mathbb{R}^n de classe C^2 telle que $\Delta u = 0$. Si u est bornée, alors u est constante.*

Remarque 4 (i) Il existe des fonctions harmoniques de classe C^2 qui ne sont pas polynômiales: par exemple, la fonction $u(x, y) = e^x \cos y$ est harmonique

sur \mathbb{R}^2 (c'est le cas, plus généralement, de la partie réelle d'une fonction entière non polynômiale).

(ii) Toute fonction entière $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ étant harmonique, le Théorème 5 est une généralisation substantielle de sa version bien connue en analyse complexe: une fonction entière bornée (ou même majorée par un polynôme) est constante.

La preuve du Théorème 1 sera une conséquence facile, d'une part, du Théorème 5 plus bas, qui est un résultat important d'un intérêt indépendant, et, d'autre part, des propriétés usuelles de la transformation de Fourier \mathcal{F} sur \mathcal{S}' .

Rappelons que le support $\text{supp}(T)$ d'une distribution $T \in \mathcal{S}'$ est le complémentaire du plus grand ouvert $U \subset \mathbb{R}^n$ tel que $\langle T, \varphi \rangle = 0$ pour tout $\varphi \in \mathcal{S}$ avec $\text{supp } \varphi \subset U$. Le résultat suivant caractérise les distributions à support ponctuel. Sans perte de généralité, il suffit de caractériser celles dont le support est $\{0\}$. Des exemples de telles distributions sont fournis par les combinaisons linéaires (finies!) des distributions de la forme $\partial^\alpha \delta_0$ et le résultat est qu'elles sont toutes de cette forme.

Théorème 5 Soit $T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ avec $\text{supp}(T) = \{0\}$. Alors il existe un entier N et des nombres complexes a_α pour tout $\alpha \in \mathbb{N}^n$ avec $|\alpha| \leq N$ tels que $T = \sum_{|\alpha| \leq N} a_\alpha \partial^\alpha \delta_0$.

Déduction du Théorème 1 à partir du Théorème 5 La transformée de Fourier $\mathcal{F}(\varphi)$ d'une fonction $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ est définie par

$$\mathcal{F}(\varphi)(\xi) = \int_{\mathbb{R}^n} \varphi(x) e^{-2\pi i x \cdot \xi} dx, \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^n.$$

Nous rappelons que $\mathcal{F} : \mathcal{S} \rightarrow \mathcal{S}$ est un isomorphisme bicontinuu qui s'étend en un isomorphisme bicontinuu $\mathcal{F} : \mathcal{S}' \rightarrow \mathcal{S}'$ par la formule $\langle \mathcal{F}(T), \varphi \rangle = \langle T, \mathcal{F}(\varphi) \rangle$ pour tout $T \in \mathcal{S}'$ et $\varphi \in \mathcal{S}$. De plus, on a $\mathcal{F}(\partial^\alpha T) = (2\pi i \xi)^\alpha \mathcal{F}(T)$ et $\mathcal{F}((-2\pi i x)^\alpha) = \partial^\alpha \delta_0$ pour tout $\alpha \in \mathbb{N}^n$.

Soit $T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ avec $\Delta T = 0$. Comme $0 = \mathcal{F}(\Delta T) = \sum_{j=1}^n (2\pi i \xi_j)^2 \mathcal{F}(T)$, on a donc $|\xi|^2 \mathcal{F}(T) = 0$. Il s'ensuit que $S := \mathcal{F}(T)$ est une distribution avec $\text{supp } S \subset \{0\}$. En effet, soit $\varphi \in \mathcal{S}$ avec $\text{supp } \varphi \subset \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$. Alors φ s'annule sur un voisinage de 0; par conséquent, ψ définie par $\psi(\xi) = \varphi(\xi)/|\xi|^2$ si $\xi \neq 0$ et $\psi(0) = 0$ est dans \mathcal{S} . Comme $\varphi = |\xi|^2 \psi$, on a

$$\langle S, \varphi \rangle = \langle S, |\xi|^2 \psi \rangle = \langle |\xi|^2 S, \psi \rangle = 0.$$

Par le Théorème 5, il existe donc un entier N et des nombres complexes a_α tels que $S = \sum_{|\alpha| \leq N} a_\alpha \partial^\alpha \delta_0$. Il s'ensuit que

$$T = \mathcal{F}^{-1}(S) = \sum_{|\alpha| \leq N} a_\alpha \mathcal{F}^{-1}(\partial^\alpha \delta_0) = \sum_{|\alpha| \leq N} a_\alpha (-2\pi i x)^\alpha.$$

Ceci montre que T est un polynôme. ■

Preuve du Théorème 5 Soit $T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ avec $\text{supp}(T) = \{0\}$. Comme T est une forme linéaire continue sur \mathcal{S} , il existe $C > 0$ et des entiers m et N tels que, pour $\varphi \in \mathcal{S}$, on a

$$|\langle T, \varphi \rangle| \leq C \sum_{|\alpha| \leq N, |\beta| \leq m} \rho_{\alpha\beta}(\varphi),$$

où $\rho_{\alpha\beta}(\varphi) = \sup_{x \in \mathbb{R}^n} |x^\beta (\partial^\alpha \varphi)(x)|$. Voici le point-clé de la preuve:

Assertion: $\bigcap_{|\alpha| \leq N} \text{Ker}(\partial^\alpha \delta_0) \subset \text{Ker}(T)$.

Un lemme élémentaire d'algèbre linéaire (voir Lemme 6 plus bas) impliquera alors que T , qui est une forme linéaire sur l'espace vectoriel \mathcal{S} , est une combinaison linéaire des formes linéaires $\partial^\alpha \delta_0$ pour $|\alpha| \leq N$.

Pour montrer l'assertion, soit $\varphi \in \mathcal{S}$ avec $\langle \partial^\alpha \delta_0, \varphi \rangle = 0$, c-à-d $(\partial^\alpha \varphi)(0) = 0$ pour tout $|\alpha| \leq N$. Nous devons montrer que $\langle T, \varphi \rangle = 0$.

Fixons une fonction η de classe C^∞ sur \mathbb{R}^n avec $\eta(x) = 1$ pour $|x| \leq 1$ et $\eta(x) = 0$ pour $|x| \geq 2$. Posons $\eta_\varepsilon(x) = \eta(x/\varepsilon)$ pour tout $\varepsilon > 0$.

Alors $(\eta_\varepsilon \varphi)(x) = \varphi(x)$ pour $|x| \leq \varepsilon$ et $(\eta_\varepsilon \varphi)(x) = 0$ pour $|x| \geq 2\varepsilon$. En particulier, $\text{supp}(\eta_\varepsilon \varphi - \varphi) \subset \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ et donc $\langle T, \eta_\varepsilon \varphi - \varphi \rangle = 0$, c-à-d $\langle T, \eta_\varepsilon \varphi \rangle = \langle T, \varphi \rangle$. Il suffira donc de montrer que $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \langle T, \eta_\varepsilon \varphi \rangle = 0$.

Comme $|\langle T, \eta_\varepsilon \varphi \rangle| \leq C \sum_{|\alpha| \leq N, |\beta| \leq m} \rho_{\alpha\beta}(\eta_\varepsilon \varphi)$, il suffit de montrer que

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \rho_{\alpha\beta}(\eta_\varepsilon \varphi) = 0, \quad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{N}^n, |\alpha| \leq N.$$

On a $(\partial^\alpha \varphi)(0) = 0$ pour tout $|\alpha| \leq N$; la formule de Taylor pour $\partial^\alpha \varphi$ montre alors qu'il existe $K > 0$ et $\varepsilon_0 > 0$ tel que

$$(*) \quad |\partial^\alpha \varphi(x)| \leq K |x|^{N+1-|\alpha|}, \quad \forall |x| \leq 2\varepsilon_0 \text{ et } |\alpha| \leq N.$$

D'autre part, par la formule de Leibniz, on a

$$\partial^\alpha (\eta_\varepsilon \varphi)(x) = \sum_{\gamma \leq \alpha} \binom{\alpha}{\gamma} (\partial^{\alpha-\gamma} \eta)(x/\varepsilon) (\partial^\gamma \varphi)(x) \varepsilon^{|\gamma|-|\alpha|}.$$

Soient $\alpha, \beta \in \mathbb{N}^n$ avec $|\alpha| \leq N$. Posons $\|\eta\|_N := \sup_{|\gamma| \leq N} \|\partial^\gamma \eta\|_\infty$. Alors, pour tout $\varepsilon < \min\{1/2, \varepsilon_0\}$, on a, en utilisant (*):

$$\begin{aligned}
 \rho_{\alpha\beta}(\eta_\varepsilon\varphi) &= \sup_{x \in \mathbb{R}^n} |x^\beta (\partial^\alpha (\eta_\varepsilon\varphi))(x)| = \sup_{|x| \leq 2\varepsilon} |x^\beta (\partial^\alpha (\eta_\varepsilon\varphi))(x)| \\
 &\leq \sup_{|x| \leq 2\varepsilon} |(\partial^\alpha (\eta_\varepsilon\varphi))(x)| \\
 &\leq \sup_{|x| \leq 2\varepsilon} \sum_{\gamma \leq \alpha} \binom{\alpha}{\gamma} \varepsilon^{|\gamma| - |\alpha|} |(\partial^{\alpha-\gamma} \eta)(x/\varepsilon) (\partial^\gamma \varphi)(x)| \\
 &\leq \|\eta\|_N \sup_{|x| \leq 2\varepsilon} \sum_{\gamma \leq \alpha} \binom{\alpha}{\gamma} \varepsilon^{|\gamma| - |\alpha|} |(\partial^\gamma \varphi)(x)| \\
 &\leq K \|\eta\|_N \sup_{|x| \leq 2\varepsilon} \sum_{\gamma \leq \alpha} \binom{\alpha}{\gamma} \varepsilon^{|\gamma| - |\alpha|} |x|^{N+1-|\gamma|} \\
 &\leq K \|\eta\|_N \sum_{\gamma \leq \alpha} \binom{\alpha}{\gamma} \varepsilon^{|\gamma| - |\alpha|} (2\varepsilon)^{N+1-|\gamma|} \\
 &\leq 2\varepsilon K \|\eta\|_N \sum_{\gamma \leq \alpha} \binom{\alpha}{\gamma} 2^{N-|\gamma|} \varepsilon^{N-|\alpha|} \leq 2\varepsilon K \|\eta\|_N \sum_{\gamma \leq \alpha} \binom{\alpha}{\gamma} (2\varepsilon)^{N-|\gamma|} \\
 &\leq 2\varepsilon K \|\eta\|_N \sum_{\gamma \leq \alpha} \binom{\alpha}{\gamma} \leq \varepsilon K' \|\eta\|_N,
 \end{aligned}$$

où K' est une constante dépendant seulement de N et n . On a donc $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \rho_{\alpha\beta}(\eta_\varepsilon\varphi) = 0$. ■

Lemme 6 Soient V un espace vectoriel sur un corps \mathbb{K} et $\varphi, \varphi_1, \dots, \varphi_n$ des formes linéaires sur V telles que $\bigcap_{i=1}^n \text{Ker}(\varphi_i) \subset \text{Ker}(\varphi)$. Alors il existe $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{K}$ tels que $\varphi = \sum_{i=1}^n a_i \varphi_i$.

Preuve On considère l'application linéaire $\Phi : V \rightarrow \mathbb{K}^n$ définie par $\Phi(v) = (\varphi_1(v), \dots, \varphi_n(v))$ pour tout $v \in V$. Alors $\text{Ker}(\Phi) = \bigcap_{i=1}^n \text{Ker}(\varphi_i)$. On définit une forme linéaire $L : \text{Image}(\Phi) \rightarrow \mathbb{K}$ par $L(\Phi(v)) = \varphi(v)$. Cette application est bien définie car $\text{Ker}(\Phi) \subset \text{Ker}(\varphi)$, par l'hypothèse sur φ . On étend L (de manière arbitraire) en une forme linéaire sur \mathbb{K}^n , notée également L . Il existe des scalaires $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{K}$ tels que $L(x_1, \dots, x_n) = a_1 x_1 + \dots + a_n x_n$ pour tout $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{K}^n$. On a alors, pour tout $v \in V$,

$$\varphi(v) = L(\Phi(v)) = L(\varphi_1(v), \dots, \varphi_n(v)) = a_1 \varphi_1(v) + \dots + a_n \varphi_n(v),$$

c-à-d $\varphi = a_1 \varphi_1 + \dots + a_n \varphi_n$. ■