Agrégation interne 1999 - première épreuve

Indications de solution : Michel Coste

Première partie : Enveloppe convexe ; propriétés.

Il s'agit dans cette partie de résultats classiques, culminant avec le théorème de Caratheodory qui dit que l'enveloppe convexe d'un sous-ensemble S de $\mathbf{R}^n$ est l'ensemble des barycentres à coefficients positifs de familles de $n+1$ points de S. Comme d'habitude, on en déduit que l'enveloppe convexe d'un compact est compacte. (cf. par exemple Tauvel, Math. géné. pour l'agrég.)

Deuxième partie : Exemples.

On cherche à déterminer dans plusieurs exemples l'ensemble

$$\mathcal{F}(A) = \{x^*Ax \ / \ x \in \mathbf{C}^n \text{ et } x^*x = 1\} ,$$

où A est une matrice $n \times n$ complexe.

1. Si $A = I_n$, $\mathcal{F}(A) = \{1\}$. Si $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $\mathcal{F}(A) = [0,1]$. Si $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $\mathcal{F}(A)$ est le disque fermé de centre l'origine et de rayon 1 ; il faut voir que $\{2\,\overline{x_1}\,x_2 \mid |x_1|^2 + |x_2|^2 = 1\}$ peut se réécrire comme $\{2\sin\theta\cos\theta\, e^{i\varphi} \mid \theta \in [0,\pi/2], \varphi \in \mathbf{R}\}$.

2. Si A est diagonale, $\mathcal{F}(A)$ est l'enveloppe convexe des éléments diagonaux : il sufit d'expliciter la définition de $\mathcal{F}(A)$ et d'utiliser I.3.

3. $\mathcal{F}(A)$ est l'image de la sphère unité par l'application continue $x \mapsto x^*Ax$, donc il est compact.

4. Les égalités

$$\mathcal{F}(A + \alpha I_n) = \mathcal{F}(A) + \{\alpha\} \qquad \mathcal{F}(\alpha A) = \alpha\mathcal{F}(A)$$

se vérifient immédiatement.

5. $\mathcal{F}(A)$ contient les valeurs propres comme images de vecteurs propres de norme 1, et les éléments diagonaux comme images des vecteurs de la base canonique.

6.

(a) L'écriture unique $A = H(A) + iS(A)$, avec $H(A)$ et $S(A)$ hermitiennes, s'obtient avec $H(A) = \dfrac{1}{2}(A + A^*)$ et $S(A) = \dfrac{1}{2i}(A - A^*)$

(b) On a $\mathcal{F}(H(A)) = \Re(\mathcal{F}(A))$ immédiatement.

7. L'inclusion $\mathcal{F}(A+B) \subset \mathcal{F}(A) + \mathcal{F}(B)$ est immédiate. En prenant $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, on a $\mathcal{F}(A) + \mathcal{F}(B)$ (i.e. $[0,1] + [0,1] = [0,2]$) qui n'est pas inclus dans $\mathcal{F}(A+B) = \{1\}$ (cf. question 1).

8. Si U est unitaire, l'application $x \mapsto Ux$ est une bijection de l'ensemble des éléments de norme 1 de $\mathbf{C}^n$ sur lui même, et $\mathcal{F}(U^*AU) = \mathcal{F}(A)$.

9. On suppose que A est une matrice normale.

(a) $H(A)$ et $S(A)$ commutent : ce sont des polynômes en A et A^*.

(b) La commutation entraîne que tout sous-espace propre de $H(A)$ est stable par $S(A)$. L'endomorphisme induit est hermitien, donc diagonalise dans une base orthonormale du sous-espace.

(c) Comme $\mathbf{C}^n$ est somme orthogonale des sous-espaces propres de $H(A)$ (puisqu'elle est hermitienne), on peut diagonaliser simultanément $H(A)$ et $S(A)$ dans une base orthonormale de $\mathbf{C}^n$. (Ceci fait une démonstration du fait qu'une matrice normale diagonalise dans une base orthonormale, à partir du fait correspondant pour les matrices hermitiennes.)

(d) On peut se ramener à A diagonale (question 8), et la question 2 dit que $\mathcal{F}(A)$ est l'enveloppe convexe de $\mathrm{Sp}(A)$.

10. Si A est hermitienne, $\mathrm{Sp}(A) \subset \mathbf{R}$ et $\mathcal{F}(A) = [\min(\mathrm{Sp}(A)), \max(\mathrm{Sp}(A))]$.

Troisième partie : Description de $\mathcal{F}(A)$ lorsque A est une matrice 2×2.

1.

(a) Si on pose $\lambda = \dfrac{1}{2}\,\mathrm{tr}(A)$ et $M = A - \lambda I_2$, bien sûr $\mathrm{tr}(M) = 0$.

(b) On écrit $M = H(M) + iS(M)$ avec $H(M)$ et $S(M)$ hermitiennes comme en II.6.a. Les matrices $H(M)$ et $S(M)$ sont aussi de trace nulle. En prenant U unitaire telle que $U^*S(M)U$ soit diagonale, on obtient

$$U^*MU = \begin{pmatrix} \mu & \nu \\ \overline{\nu} & -\mu \end{pmatrix} ,$$

où μ et ν sont des complexes.

2. Si $v = \begin{pmatrix} e^{i\theta_1} \\ e^{i\theta_2} \end{pmatrix}$, alors

$$(\dagger) \qquad v^* \begin{pmatrix} \mu & \nu \\ \overline{\nu} & -\mu \end{pmatrix} v = 2\Re(\nu e^{i(\theta_2 - \theta_1)}) .$$

Si $\nu \neq 0$ et si on prend $\theta_2 - \theta_1 + \arg(\nu) = \dfrac{\pi}{2} \pmod{\pi}$, la quantité ci-dessus est nulle. Ceci a lieu par exemple pour $v = \begin{pmatrix} e^{i\theta} \\ i \end{pmatrix}$ ou $v = \begin{pmatrix} e^{i\theta} \\ -i \end{pmatrix}$, où $\theta = \arg(\nu)$. Pour $\nu = 0$ on peut prendre $\theta = 0$. Avec ce choix le nombre $(\dagger)$ est toujours nul.

3. Toujours avec $\theta = \arg(\nu)$ (ou $\theta = 0$ si $\nu = 0$), posons

$$U_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} e^{i\theta} & e^{i\theta} \\ i & -i \end{pmatrix} .$$

La matrice U_1 est unitaire et le produit $U_1^* \begin{pmatrix} \mu & \nu \\ \overline{\nu} & -\mu \end{pmatrix} U_1$ a sa diagonale nulle d'après la question 2. Posons $T = U\,U_1$. Alors

$$T^*AT = \lambda I_2 + \begin{pmatrix} 0 & a \\ b & 0 \end{pmatrix} = \lambda I_2 + aN + bN^* ,$$

où a et b sont deux complexes. On pose $g(z) = \lambda + az + b\overline{z}$, pour $z \in \mathbf{C}$.

4. $\mathcal{F}(N)$ est l'ensemble des $z = \overline{x}_1\, x_2$, où $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbf{C}^2$ vérifie $x^*x = 1$. D'après II.8 et la question précédente, $\mathcal{F}(A)$ est l'ensemble des $\lambda + az + b\overline{z}$, avec z comme ci-dessus. Donc $\mathcal{F}(A) = g(\mathcal{F}(N))$. Rappelons que $\mathcal{F}(N)$ est le disque fermé de centre l'origine et de rayon $\frac{1}{2}$ (II.1 et 4).

5. Il est clair que g est affine (vu comme application de $\mathbf{R}^2$ dans lui-même). Comme $\mathcal{F}(N)$ est convexe (c'est un disque fermé), son image par une fonction affine $\mathcal{F}(A)$ est aussi convexe.

On peut dire plus. Soit σ l'application linéaire associée à g. Si σ est de rang 2, $\mathcal{F}(A)$ est l'intérieur d'une ellipse (ellipse comprise). Si σ est de rang 1, $\mathcal{F}(A)$ est un segment porté par la droite image de g. Si σ est nulle, $\mathcal{F}(A)$ est un point. Les questions suivantes détaillent ceci.

6. Si $u = \sigma(1)$ et $v = \sigma(i)$, la matrice de σ dans la base $(1, i)$ est $\begin{pmatrix} \Re(u) & \Re(v) \\ \Im(u) & \Im(v) \end{pmatrix}$, et le déterminant de cette matrice est $\Im(\overline{u}\,v)$. Puisque $u = a + b$ et $v = a\,i - b\,i$, on obtient $\det \sigma = |a|^2 - |b|^2$.

7. La comparaison de $(T^*AT)(T^*A^*T)$ et $(T^*A^*T)(T^*AT)$ montre que $AA^* = A^*A$ si et seulement si $|a| = |b|$. Par ailleurs g est bijective si et seulement si le déterminant de σ est non nul, c.-à-d. si et seulement si $|a| \neq |b|$.

8. On suppose $|a| \neq |b|$.

(a) On remarque que $\mathcal{F}(N)$ est l'enveloppe convexe de $\mathcal{C} = \{z \in \mathbf{C} \;/\; |z| = \frac{1}{2}\}$. Donc $\mathcal{F}(A) = g(\mathcal{F}(C))$ est l'enveloppe convexe de $\mathcal{E} = g(\mathcal{C})$. Puisque $\mathcal{C}$ est la frontière de $\mathcal{F}(N)$ et que g est un homéomorphisme de $\mathbf{R}^2$ sur lui-même, $\mathcal{E}$ est la frontière de $\mathcal{F}(A)$.

(b) Avec $a = |a|\, e^{i\alpha}$ et $b = |b|\, e^{i\beta}$, on calcule

$$g(z) = \lambda + \left(|a|\, e^{i\frac{\alpha-\beta}{2}} z + |b|\, e^{-i\frac{\alpha-\beta}{2}} \overline{z} \right) e^{i\frac{\alpha+\beta}{2}} .$$

En remplaçant z par $\frac{1}{2}e^{i\tau}$, il vient que $\mathcal{E}$ est l'ensemble des

$$\lambda + \frac{1}{2}\Big((|a|+|b|)\cos(\frac{\alpha-\beta}{2}+\tau) + i(|a|-|b|)\sin(\frac{\alpha-\beta}{2}+\tau)\Big)\exp(i\frac{\alpha+\beta}{2}) ,$$

pour $\tau \in \mathbf{R}$. En faisant $\theta = \dfrac{\alpha-\beta}{2}+\tau$, $\mathcal{E}$ s'écrit aussi comme l'ensemble des

$$\lambda + \frac{1}{2}\Big((|a|+|b|)\cos(\theta) + i(|a|-|b|)\sin(\theta)\Big)\exp(i\frac{\alpha+\beta}{2}) ,$$

pour $\theta \in \mathbf{R}$.

(c) La description précédente montre que $\mathcal{E}$ est l'ellipse de centre λ, de demi-grand axe $\frac{1}{2}(|a|+|b|)$, de demi-petit axe $\frac{1}{2}\Big||a|-|b|\Big|$, et dont la droite portant le grand axe fait un angle $\frac{1}{2}(\alpha+\beta)$ avec l'axe réel. Si $a=0$ (resp. $b=0$, $\mathcal{E}$ est le cercle de centre λ et rayon $|b|$ (resp. $|a|$). Le polynôme caractéristique de A (qui est le même que celui de T^*AT) est $(\lambda-X)^2-ab$. Les points de $\mathrm{Sp}(A)$, qui sont $\lambda\pm\sqrt{|ab|}\exp(i\frac{\alpha+\beta}{2})$, sont les foyers de l'ellipse $\mathcal{E}$ (se rappeler que le carré du grand axe moins le carré du petit axe est le carré de la distance des foyers au centre).

9. En tirant parti de ce qu'on a vu, on obtient :

(i) A est normale si et seulement si $\mathcal{F}(A)$ est un segment ou un point.
(ii) A possède une valeur propre double si et seulement si $\mathcal{F}(A)$ est un disque fermé ou un point.
(iii) A est unitaire si et seulement si $\mathcal{F}(A)$ est une corde du cercle unité, ou un point de ce cercle.
(iv) A est hermitienne si et seulement si $\mathcal{F}(A)$ est un segment de l'axe réel ou un point de l'axe réel.
(v) A est scalaire si et seulement si $\mathcal{F}(A)$ est un point.

Pour la partie « si » des affirmations ci-dessus, on utilise par exemple le fait que si A n'est pas normale, alors $\mathcal{F}(A)$ est l'enveloppe convexe d'une ellipse non réduite à un point ou un segment, et que les valeurs propres de A sont les affixes des foyers de l'ellipse. On utilise aussi que si A est normale, alors $\mathcal{F}(A)$ est un segment éventuiellement réduit à un point dont les affixes des extrémités sont les valeurs propres de A.

10. Nous dirons que deux matrices A et B sont unitairement semblables s'il existe une matrice unitaire U telle que $B=U^*AU$. Être unitairement semblables est une relation d'équivalence. Remarquons que les matrices $\begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} t & z \\ y & x \end{pmatrix}$ sont unitairement semblables (prendre $U=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$).

Si $\mathcal{F}(A)$ est un segment $[z_1,z_2]$, alors A est normale (donc diagonalisable dans une base orthonormale) et a pour valeurs propres $\{z_1,z_2\}$. Donc A est unitairement semblable à $\begin{pmatrix} z_1 & 0 \\ 0 & z_2 \end{pmatrix}$. De même, si $\mathcal{F}(A)$ est un point $\{z\}$, A est unitairement semblable à $\begin{pmatrix} z & 0 \\ 0 & z \end{pmatrix}$.

Supposons maintenant que $\mathcal{F}(A)$ est un disque fermé, de centre λ et de rayon $r>0$. D'après III.8, A est unitairement semblable à une matrice de la forme $\begin{pmatrix} \lambda & 2re^{i\alpha} \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$. Cette matrice est elle-même unitairement semblable à $\begin{pmatrix} \lambda & 2r \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$ (on peut prendre $U=\begin{pmatrix} e^{i\alpha/2} & 0 \\ 0 & e^{-i\alpha/2} \end{pmatrix}$).

Enfin, supposons que $\mathcal{F}(A)$ est l'enveloppe convexe de l'ellipse de centre λ, de grand axe L, de petit axe $\ell<L$, et dont la droite portant le grand axe fait un angle γ avec l'axe réel. D'après III.8, A est unitairement semblable à une matrice de la forme $\begin{pmatrix} \lambda & (L+\ell)e^{i\alpha} \\ (L-\ell)e^{i(2\gamma-\alpha)} & \lambda \end{pmatrix}$. Cette matrice est elle-même unitairement semblable à $\begin{pmatrix} \lambda & (L+\ell) \\ (L-\ell)e^{2i\gamma} & \lambda \end{pmatrix}$ (que prendre pour U ?).

Dans tous les cas de figure, on voit que $\mathcal{F}(A)=\mathcal{F}(B)$ entraîne que A est unitairement semblable à B.

11. Les deux matrices diagonales

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad B=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

ne sont pas semblables (elles n'ont pas même polynôme caractéristique), donc elles ne sont pas unitairement semblables. Par contre, on a $\mathcal{F}(A) = \mathcal{F}(B) = [1, 2]$, d'après II.2.

Quatrième partie : Cas général.

1. Un élément $x \in \mathbf{C}^{n+m}$ vérifie $x^*x = 1$ si et seulement s'il s'écrit sous la forme (ax_1, bx_2) avec $x_1 \in \mathbf{C}^n$ tel que $x_1^*x_1 = 1$, $x_2 \in \mathbf{C}^m$ tel que $x_2^*x_2 = 1$ et a et b réels ≥ 0 tels que $a^2 + b^2 = 1$. On a alors

$$x^*(A \oplus B)x = a^2(x_1^*Ax_1) + b^2(x_2^*Bx_2) ,$$

et donc $\mathcal{F}(A \oplus B)$ est l'ensemble des éléments de la forme $\alpha z + (1 - \alpha)t$ avec $z \in \mathcal{F}(A)$, $t \in \mathcal{F}(B)$ et $\alpha \in [0, 1]$. On en déduit qu'il est contenu dans l'enveloppe convexe de $A \cup B$. Si l'on sait de plus que $\mathcal{F}(A)$ et $\mathcal{F}(B)$ sont convexes (ce qu'on a vu en dimension 2 et qu'on verra dans le cas général à la question 3), on a que $\mathcal{F}(A \oplus B)$ est l'enveloppe convexe de $\mathcal{F}(A) \cup \mathcal{F}(B)$.

2. Ici $\mathcal{F}(A)$ est le disque de centre l'origine et de rayon $\frac{1}{2}$ (II.1(ii)) et $\mathcal{F}(B)$ est le segment d'extrémités $-i$ et i dans le plan complexe, parce que B est normale de valeurs propres i et $-i$ (II.9.d). Donc $\mathcal{F}(A \oplus B)$ est l'enveloppe convexe de la réunion du disque et du segment.

3.

a) Soit P un plan vectoriel dans $\mathbf{C}^n$ contenant x et y. Soit (e_1, e_2) une base orthonormale de P, que l'on complète en une base orthonormale $(e_1, \ldots, e_n)$ de $\mathbf{C}^n$. La matrice U dont les colonnes sont $e_1, \ldots, e_n$ est unitaire, et x et y sont combinaisons linéaires des deux premières colonnes. On a donc $x = Uv$ et $y = Uw$, avec toutes les composantes de v et de w d'ordre au moins égal à trois nulles.

b) Soient U, v et w comme-ci-dessus. Soient v' et w' dans $\mathbf{C}^2$ les vecteurs formés des deux premières composantes de v et w, respectivement. Soit B la matrice 2×2 qui est le coin supérieur gauche de U^*AU. On a $(v')^*\, v' = 1$, $(w')^*\, w' = 1$, et

$$\alpha\, x^*Ax + (1 - \alpha)\, y^*Ay = \alpha\, (v')^*Bv' + (1 - \alpha)\, (w')^*Bw' .$$

D'après la convexité de $\mathcal{F}(B)$, il existe $t' \in \mathbf{C}^2$ tel que $(t')^*\, t = 1$ et

$$\alpha\, (v')^*Bv + (1 - \alpha)\, (w')^*Bw' = (t')^*Bt' .$$

Soit $t \in \mathbf{C}^n$ obtenu à partir de t' en ajoutant des composantes nulles et $z = Ut$. Alors $z^*z = 1$ et

$$\alpha\, x^*Ax + (1 - \alpha)\, y^*Ay = z^*Az ,$$

ce qui montre que $\mathcal{F}(A)$ est convexe.

4. On se propose de montrer que, pour tout endomorphisme f d'un espace hermitien $\mathcal{V}$ de dimension n, il existe une base orthonormale $(e_1, \ldots, e - n)$ de $\mathcal{V}$ telle que les $(e_i|f(e_i))$ sont tous égaux.

a) Soit $\lambda \in \mathbf{C}$. Les $(e_i|f(e_i))$ sont tous égaux si et seulement si c'est le cas pour les $(e_i|(f - \lambda\,\mathrm{Id})(e_i))$, car on a toujours $(e_i|e_i) = 1$. On peut prendre $\lambda = \dfrac{1}{n}\,\mathrm{tr}(f)$, et l'on voit alors qu'on peut supposer $\mathrm{tr}(f) = 0$.

b) Les éléments diagonaux de A (matrice de f dans une base orthonormale) sont dans $\mathcal{F}(A)$ (II.5). Puisque $\mathcal{F}(A)$ est convexe, la somme des éléments diagonaux qui est 0 appartient à $\mathcal{F}(A)$. Ceci veut dire qu'il existe $x \in \mathbf{C}^n$ tel que $x^*\, x = 1$ et $x^*Ax = 0$. Puisqu'on travaille dans une base orthonormale, ceci veut dire qu'il existe $e_1 \in \mathcal{V}$ tel que $(e_1|e_1) = 1$ et $(e_1|f(e_1)) = 0$. On note H l'orthogonal de e_1 dans $\mathcal{V}$, p le projecteur orthogonal sur H et f' l'endomorphisme de H induit par $p \circ f$.

c) Soit $x \in H$. Comme $f(x) = f'(x) + y$ où y est orthogonal à H, donc à x, on a $(x|f'(x)) = (x|f(x))$.

d) Soit A la matrice de f dans une base orthonormale obtenue en complétant (e_1) par une base orthonormale $(e_2, \ldots, e_n)$ de H. Alors le premier élément diagonal de A est nul, et la matrice de f' dans la base $(e_2, \ldots, e_n)$ s'obtient en enlevant la première ligne et la première colonne de A. Donc la trace de f' est nulle. Ceci permet de montrer par récurrence sur n la propriété suivante : "Si f est un endomorphisme de trace nulle d'un espace vectoriel hermitien de dimension n, il existe une base orthonormale $(e_1, \ldots, e_n)$ telle que $(e_i|f(e_i)) = 0$ pour $i = 1, \ldots, n$". Remarquer que le cas $n = 1$ est trivial.

5.

a) Si $H(e^{i\theta}A)$ est définie positive, ses valeurs propres sont strictement positives et donc $\mathcal{F}(H(e^{i\theta}A))$ est formé de réels strictement positifs (II.10). D'après II.6.b, $\mathcal{F}(e^{i\theta}A)$ est formé de nombres complexes à partie réelle strictement positive, et donc $0 \notin \mathcal{F}(e^{i\theta}A)$. D'où $0 \notin \mathcal{F}(A) = e^{-i\theta}\mathcal{F}(e^{i\theta}A)$.

b) Soit $\mathcal{C}$ un compact convexe non vide de $\mathbf{C}$, $\alpha \in \mathbf{C} \setminus \mathcal{C}$. Puisque $\alpha \notin \mathcal{C}$ et que $\mathcal{C}$ est compact, $|z - \alpha|$ a un minimum $m > 0$ sur $\mathcal{C}$ pour $z = z_0$. Soit $\mathcal{D}$ la médiatrice de α et z_0. Supposons qu'il existe $u \in C$ dans le demi-plan ouvert délimité par $\mathcal{D}$ contenant α. En transformant la situation par une similitude, on peut supposer que $\alpha = 1$ et $z_0 = -1$. Alors $u = a + ib$ avec $a > 0$, et un calcul facile montre alors que $|(1-t)z_0 + tu - \alpha| < |z_0 - \alpha|$ pour $t > 0$ suffisamment petit. Comme $(1-t)z_0 + tu \in \mathcal{C}$ pour $t \in [0, 1]$, ceci contredirait la minimalité de $|z_0 - \alpha|$. Donc le demi-plan ouvert délimité par $\mathcal{D}$ contenant α ne rencontre pas $\mathcal{C}$.

c) Si 0 n'appartient pas à $\mathcal{F}(A)$ qui est compact convexe, il existe une droite $\mathcal{D}$ telle que le demi-plan ouvert limité par $\mathcal{D}$ contenant 0 ne rencontre par $\mathcal{F}(A)$. On peut trouver une rotation d'angle θ telle que l'image de $\mathcal{D}$ par cette rotation ait pour équation $\Re(z) = c$ avec $c > 0$. Alors $e^{i\theta}\mathcal{F}(A) = \mathcal{F}(e^{i\theta}A)$ est dans le demi-plan $\Re(z) \geq c$. On en déduit par II.6.b que $\mathcal{F}(H(e^{i\theta}A))$ est formé de réels $\geq c$. Toutes les valeurs propres de $H(e^{i\theta}A)$ sont $\geq c$, et cette matrice est donc définie positive.

Cinquième partie : Caractérisation.

1. Comme $\mathcal{F}_2(A)$ est une partie convexe compacte du plan complexe et que $\beta \notin \mathcal{F}_2(A)$, il existe d'après IV.5.b une droite $\mathcal{L}$ telle que le demi-plan ouvert limité par $\mathcal{L}$ contenant β ne rencontre pas $\mathcal{F}_2(A)$.

2. Soit $z \mapsto \alpha_1 z + \alpha_2$ une similitude directe (ou translation) qui amène le point d'affixe β sur le point d'affixe -1 et la droite $\mathcal{L}$ sur l'axe imaginaire pur. On obtient une telle similitude en composant la translation qui amène β en -1 avec la similitude de centre -1 qui amène l'image de $\mathcal{L}$ sur l'axe imaginaire pur. On peut vérifier que la similitude est unique, mais ceci n'importe pas ici. On a bien

$$\Re(\alpha_1\beta + \alpha_2) < 0 \quad \text{et} \quad \alpha_1\mathcal{F}_2(A) + \{\alpha_2\} \subset \{z \in \mathbf{C} \;/\; \Re(z) \geq 0\} \;.$$

3. D'après les propriétés de $\mathcal{F}_2$, on a

$$\mathcal{F}_2(\alpha_1 A + \alpha_2 I_n) = \alpha_1\mathcal{F}_2(A) + \{\alpha_2\} \subset \{z \in \mathbf{C} \;/\; \Re(z) \geq 0\} \;,$$

et donc la matrice $(\alpha_1 A + \alpha_2 I_n) + (\alpha_1 A + \alpha_2 I_n)^*$ est positive. Mais alors, d'après les propriétés de $\mathcal{F}_1$, et puisque $\alpha_1\beta + \alpha_2 \in \mathcal{F}_1(\alpha_1 A + \alpha_2 I_n)$, on devrait avoir $\Re(\alpha_1\beta + \alpha_2) \geq 0$, une contradiction.

4. L'application $\mathcal{F}$ définie dans l'introduction est la seule application de $\mathcal{M}_n(\mathbf{C})$ dans l'ensemble des parties de $\mathbf{C}$ vérifiant les propriétés (1), (2) et (3).