
Réduction de Jordan des endomorphismes

Soit \mathbf{k} un corps algébriquement clos { pensez au corps des nombres complexes. On donne dans cette note une démonstration simple du théorème de réduction des endomorphismes de \mathbf{k}^d , dû à Jordan. Son énoncé requiert une notation. Fixons-nous un endomorphisme T de \mathbf{k}^d . Étant donné un scalaire $\lambda \in \mathbf{k}$, on appelle λ -chaîne de Jordan associée à (T, λ) et à un vecteur v une famille libre de \mathbf{k}^d de la forme $(v, (T - \lambda)v, \dots, (T - \lambda)^{m-1}v)$, telle que $(T - \lambda)^m v = 0$, pour un certain entier $m \geq 1$.

Théorème 1. *Quelle que soit la dimension $d \geq 2$ de l'espace \mathbf{k}^d , et l'endomorphisme T de \mathbf{k}^d , il existe des triplets $(v_1, \lambda_1, m_1), \dots, (v_\ell, \lambda_\ell, m_\ell)$ d'éléments de $\mathbf{k}^d \times \mathbf{k} \times \mathbb{N}$, tels que la réunion des λ_i -chaînes associées à v_i forme une base de \mathbf{k}^d . On parle de base de Jordan pour T .*

DÉMONSTRATION – Voici une démonstration élémentaire basée sur un *raisonnement par contradiction*. Supposons donc l'énoncé de Jordan faux et choisissons parmi tous les contre-exemples un endomorphisme T d'un espace \mathbf{k}^{d_0} tel que \mathbf{k}^{d_0} n'a aucune base de Jordan pour T , et pour lequel la dimension d_0 est minimale. Le corps \mathbf{k} étant algébriquement clos, T a au moins une valeur propre $\mu \in \mathbf{k}$; quitte à travailler avec $T - \mu$, on peut supposer $\mu = 0$. Dans ces conditions,

$$\dim T(\mathbf{k}^{d_0}) < d_0.$$

Notez que l'espace $T(\mathbf{k}^{d_0})$ est stable par T . Vu notre choix de dimension d_0 et l'inégalité ci-dessus, la restriction de T à $T(\mathbf{k}^{d_0})$ admet une base de Jordan \mathfrak{B} . Soit donc V un sous-espace de \mathbf{k}^{d_0} de dimension maximale contenant $T(\mathbf{k}^{d_0})$, stable par T et ayant une base de Jordan \mathfrak{B}' contenant \mathfrak{B} . Notez que l'on doit avoir $\ker T \subset V$, sans quoi on pourrait ajouter à \mathfrak{B}' un élément du noyau de T pour former un espace vectoriel ayant une base de Jordan, de dimension strictement plus grande que celle de V , contredisant sa définition. Clairement, on a $T(\mathbf{k}^{d_0}) \subset V \subset \mathbf{k}^{d_0}$.

On va voir qu'on doit avoir $T(V) = T(\mathbf{k}^{d_0})$. À tout vecteur v de \mathbf{k}^{d_0} on pourra donc associer un vecteur v' de V tel que $T(v) = T(v')$, c'est-à-dire $(v - v') \in \ker T \subset V$, montrant que $v \in V$, soit $\mathbf{k}^{d_0} = V$. La contradiction est là puisque \mathbf{k}^{d_0} n'a pas de base de Jordan pour T alors que V en a une.

Pour montrer que $T(V) = T(\mathbf{k}^{d_0})$, il nous suffit de montrer que tout élément w de la base \mathfrak{B} de $T(\mathbf{k}^{d_0})$ est dans $T(V)$. En tant qu'élément de $\mathfrak{B} \subset \mathfrak{B}'$, le vecteur w est de la forme $(T - \lambda)^k u$, pour un vecteur u de V , un scalaire λ , et un certain exposant $k \geq 0$. Si λ est non nul, notez qu'un élément quelconque v de V est dans $T(V)$ ssi $(T - \lambda)v \in T(V)$. Comme $(T - \lambda)^m w = 0$ est dans V pour un certain exposant m , par définition d'une base de Jordan, et $w \in V$, on en déduit que tous les $(T - \lambda)^j w$, ainsi que w , sont dans $T(V)$. Dans le cas où λ est nul, seul le cas où l'exposant k est nul pose problème, auquel cas $w = u$. Mais on sait aussi que $w \in T(\mathbf{k}^{d_0})$ s'écrit $T(w')$, pour un certain vecteur $w' \in \mathbf{k}^{d_0}$. Si ce vecteur w' n'appartenait pas à V , on pourrait l'ajouter à la base \mathfrak{B}' et obtenir un sous-espace stable de dimension strictement plus grande que $\dim(V)$ ayant une base de Jordan, contredisant la définition de V . Le vecteur w' est donc dans V , et $w = T(w') \in T(V)$. ▷