Mathématiques Générales agrégation externe 2012 - Indications

Michel Coste*

14 août 2012

I Un premier cas

1. Soit f et g quasi-polynomiales vérifiant $f(n) = P_{r_N(n)}(n)$ et $g(n) = Q_{r_M(n)}(n)$ pour tout $n \in \mathsf{N}$. Pour $i = 0, \dots, MN-1$, posons $R_i = P_{r_N(i)} + Q_{r_M(i)}$ (resp. $R_i = P_{r_N(i)} \times Q_{r_M(i)}$). Alors $(f+g)(n)$ (resp. $(f \times g)(n)$) est égal à $R_{r_{MN}(n)}(n)$ pour tout $n \in \mathsf{N}$ car $r_N(r_{MN}(n)) = r_N(n)$ et idem pour M.
2. (a) $u_n = 1$ si m_1 divise n et 0 sinon. Donc $v_n = 1 + \lfloor n/m_1 \rfloor$, où $\lfloor r \rfloor$ est la partie entière du réel r.
   (b) En posant $P_i(X) = 1 + \dfrac{X-i}{m_1}$ pour $i = 0, \dots, m_1 - 1$, on a $v_n = P_{r_{m_1}(n)}(n)$ pour tout $n \in \mathsf{N}$.
3. (a) La définition de u_n montre que $U = \prod_{i=1}^d U_i$.
   (b) Puisque $U_i = (1 - T^{m_i})^{-1}$, $U \times \prod_{i=1}^d (1 - T^{m_i}) = 1$.
4. Puisque $v_0 = u_0$ et $v_n - v_{n-1} = u_n$ pour $n > 0$, on a $V - T\,V = U$ donc $(1-T)V = U$.

Puisque les elements inversibles de $\mathsf{C}[[T]]$ sont les series formelles a terme constant non nul, le plongement canonique $\mathsf{C}[T] \hookrightarrow \mathsf{C}[[T]]$ s'etend en un homomorphisme injectif et commutant a la derivation de l'anneau des fractions rationnelles sans pôle en 0 dans $\mathsf{C}[[T]]$. L'image d'une fraction rationnelle sans pôle en 0 par cet homomorphisme est son developpement en serie formelle.

5. (a) Puisque G est le développement en série formelle de la fraction rationnelle $\dfrac{1}{1-T}$, G' est le développement en série formelle de $\left(\dfrac{1}{1-T}\right)' = \dfrac{1}{(1-T)^2}$. Donc $G' = G^2$.
   (b) De même $G^{(k)}$ est le développement en série formelle de $\left(\dfrac{1}{1-T}\right)^{(k)} = \dfrac{k!}{(1-T)^{k+1}}$. Donc $G^{(k)} = k!\,G^{k+1}$.
   (c) On sait d'après 3(b) que U est ici le développement en série formelle de $\dfrac{1}{(1-T)^d}$, donc $U = G^d = \dfrac{1}{(d-1)!}\,G^{(d-1)}$. On en déduit $u_n = \dfrac{1}{(d-1)!}\displaystyle\prod_{i=1}^{d-1}(n+i)$. De même, d'après 3(c), V est ici le développement en série formelle de $\dfrac{1}{(1-T)^{d+1}}$, donc $V = \dfrac{1}{d!}\,G^{(d)}$ et $v_n = \dfrac{1}{d!}\displaystyle\prod_{i=1}^{d}(n+i)$ qui est polynomial en n, de degré d.
   On pouvait obtenir directement ces resultats de maniere suivante. En ecrivant les entiers en bâtons (par exemple $|||++||+|+|||+$ pour $3+0+2+1+3+0$), on voit que compter le nombre de $(k_1, \dots, k_d) \in \mathsf{N}^d$ tels que $\sum_{i=1}^d k_i = n$ revient a compter le nombre de suites de $n+d-1$ symboles dont n sont des $|$ et $d-1$ des $+$, d'ou $u_n = \binom{n+d-1}{n}$ (coe cient binomial). Compter le nombre de $(k_1, \dots, k_d) \in \mathsf{N}^d$ tels que $\sum_{i=1}^d k_i \leq n$ revient a compter le nombre de $(k_1, \dots, k_d, k_{d+1}) \in \mathsf{N}^{d+1}$ tels que $\sum_{i=1}^{d+1} k_i = n$ (avec $k_{d+1} = n - \sum_{i=1}^d k_i$), dou $v_n = \binom{n+d}{n}$.
6. D'après **3** et **4**, on sait que V est le développement en série formelle de la fraction rationnelle $\dfrac{1}{(1-T)\prod_{i=1}^d (1-T^{m_i})}$. La décomposition en éléments simples sur C de cette fraction rationnelle

*remarques et questions bienvenues à `michel.coste@univ-rennes1.fr` est la somme d'éléments simples de la forme

$$\frac{\alpha}{(T-\zeta)^\ell} = \frac{\alpha}{(-\zeta)^\ell}\,\frac{1}{(1-\zeta^{-1}T)^\ell}\ ,$$

où ℓ est un entier > 0, α un nombre complexe et ζ une racine m-ème de l'unité. D'après **1**, il suffit de vérifier que si $\sum_{n\in\mathbf{N}} c_n T^n$ est le développement en série formelle de $\dfrac{1}{(1-\zeta^{-1}T)^\ell}$, alors $n \mapsto c_n$ est quasi-polynomiale. En posant $T = \zeta X$ et en utilisant **5(b)**, on a

$$\sum_{n\in\mathbf{N}} c_n\zeta^n X^n = (\sum_{n\in\mathbf{N}} X^n)^\ell = \frac{1}{(\ell-1)!}(\sum_{n\in\mathbf{N}} X^n)^{(\ell-1)} = \frac{1}{(\ell-1)!}\sum_{n\in\mathbf{N}}\prod_{i=1}^{\ell-1}(n+i)X^n\ ,$$

étant entendu qu'un produit sur un ensemble vide d'indices est égal à 1. Puisque ζ est une racine m-ème de l'unité, $\zeta^n = \zeta^{R_m(n)}$ et donc

$$c_n = \zeta^{-R_m(n)}\,\frac{1}{(\ell-1)!}\prod_{i=1}^{\ell-1}(n+i)$$

est bien une fonction quasi-polynomiale de n.

II Étude en dimensions 1 et 2

1. On a $u_n = 1 + \lfloor np/q\rfloor - np/q = 1 - R_q(np)$. Comme la suite $(np \bmod q)_{n\in\mathbf{N}}$ est périodique de période q puisque p est premier avec q, la suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est périodique de période q.
2. Par translation amenant A à l'origine, on peut supposer $a = b = 0$. L'égalité à démontrer est trivialement vérifiée si $c = d = 0$. On peut donc supposer que l'un des deux entiers c et d est non nul et alors ces entiers ont un pgcd $\delta > 0$; on a $c = \delta c_1$ et $d = \delta d_1$ où c_1 et d_1 sont premiers entre eux. Alors un point $(s,t) \in \mathbf{Z}^2$ est sur la droite $(0B)$ si et seulement si $ct = ds$, c.-à-d. si et seulement si $c_1 s = d_1 t$, c.-à-d. si et seulement s'il existe $k \in \mathbf{Z}$ tel que $s = kc_1$ et $t = kd_1$. Donc $[0,B]\cap\mathbf{Z}^2 = \{(kc_1,kd_1) \mid k = 0,\dots,\delta\}$ et le cardinal de cet ensemble est bien $\delta+1$.
3. (a) $[a,b]\times[c,d]\cap\mathbf{Z}^2$ est de cardinal $(a+1)(b+1) = ab + \frac{1}{2}(2a+2b)+1$, et $2(a+b)$ est bien le nombre de points à coordonnées entières sur le bord du rectangle. Le rectangle $[a,b]\times[c,d]$ vérifie la formule de Pick.

   (b) Soit c le nombre de points à coefficients entiers sur le segment joignant $(a,0)$ à $(0,b)$ ($c = \operatorname{pgcd}(a,b)+1$ d'après **2**). Par symétrie par rapport à ce segment, le nombre de points à coefficients entiers dans le rectangle $[0,a]\times[0,b]$ est égal à deux fois nombre de points à coefficients entiers du triangle, moins c. Le nombre de points à coefficients entiers du triangle est donc $((a+1)(b+1)+c)/2$. L'aire du triangle est $ab/2$ et le nombre de points à coefficients entiers sur son bord est $c+a+b-1$. Le triangle vérifie donc la formule de Pick.
4. (a) Si le polygone $\mathcal{P}$ est l'enveloppe convexe de $S = \{A_0,\dots,A_p\}$, alors il est compact comme image du compact $\{(\lambda_0,\dots,\lambda_p)\in[0,1]^{p+1} \mid \sum_{i=0}^p \lambda_i = 1\}$ par l'application continue $(\lambda_0,\dots,\lambda_p)\mapsto \sum_{i=0}^p \lambda_i A_i$.

   (b) Soit A un point de l'intérieur de $\mathcal{P}$. Alors il existe $r > 0$ tel que le disque $D(A,r)$ de rayon r et de centre A soit contenu dans $\mathcal{P}$. Soit $B \in \mathcal{P}$; alors, pour tout $\lambda \in]0,1]$ le disque de centre $\lambda A + (1-\lambda)B$ et de rayon λr (image de $D(A,r)$ par l'homothétie de centre B et de rapport λ) est contenu dans $\mathcal{P}$, et donc $\lambda A + (1-\lambda)B \in \mathcal{P}^o$. Donc B, qui est la limite des $\lambda A + (1-\lambda)B$ pour λ tendant vers 0, appartient à l'adhérence de $\mathcal{P}^o$, ce qui montre que $\mathcal{P}^o$ est dense dans $\mathcal{P}$.
5. (a) Puisque $\mathcal{P}_1\cap\mathcal{P}_2 = [A,B]$, on a $\partial\mathcal{P}_1\cap\partial\mathcal{P}_2 \subset [A,B]$. Supposons qu'il existe $C\in[A,B]$ tel que $C \notin \partial\mathcal{P}_1$; alors $C \in \mathcal{P}_1^o$ et il existe $r < 0$ tel que le disque $D(C,r)$ soit contenu dans $\mathcal{P}_1$. Soit $M \in \mathcal{P}_2$. Alors $[C,M]\cap D(C,r) \subset \mathcal{P}_1\cap\mathcal{P}_2 = [A,B]$, donc M appartient à la droite (AB). Ceci montre $\mathcal{P}_2 \subset (AB)$, mais c'est impossible car on a supposé $\mathcal{P}_2$ d'intérieur non vide. On a démontré par l'absurde $[A,B]\subset\partial\mathcal{P}_1$, et de même $[A,B]\subset\partial\mathcal{P}_2$.

   (b) Soit M_i un point de $\mathcal{P}_i$ n'appartenant pas à (AB) ($i = 1,2$) ; le triangle ABM_i est contenu dans $\mathcal{P}_i$. Puique les deux triangles ne s'intersectent que selon le côté $[A,B]$, les points M_1 et M_2 sont dans des demi-plans ouverts délimités par (A,B) distincts. Ceci montre que $\mathcal{P}_1$ est contenu dans un demi-plan fermé délimité par (AB) (celui qui ne contient pas M_2) et $\mathcal{P}_2$ dans l'autre.

(c) On suppose, pour $i = 1, 2$,

$$\mathrm{Card}(\mathcal{P}_i \cap \mathbf{Z}^2) = V(\mathcal{P}_i) + \frac{1}{2}\,\mathrm{Card}(\partial\mathcal{P}_i \cap \mathbf{Z}^2) + 1\ . \tag{1}$$

On a donc

$$\begin{aligned}\mathrm{Card}((\mathcal{P}_1 \cup \mathcal{P}_2) \cap \mathbf{Z}^2) &= \mathrm{Card}(\mathcal{P}_1 \cap \mathbf{Z}^2) + \mathrm{Card}(\mathcal{P}_2 \cap \mathbf{Z}^2) - \mathrm{Card}([A,B] \cap \mathbf{Z}^2)\\ &= V(\mathcal{P}_1) + V(\mathcal{P}_2) + 1\\ &\quad + \frac{1}{2}(\mathrm{Card}(\partial\mathcal{P}_1 \cap \mathbf{Z}^2) + \mathrm{Card}(\partial\mathcal{P}_2 \cap \mathbf{Z}^2) - 2\,\mathrm{Card}([A,B] \cap \mathbf{Z}^2) + 2)\ .\end{aligned} \tag{2}$$

D'après (a) et (b), $\partial(\mathcal{P}_1 \cup \mathcal{P}_2) = (\partial\mathcal{P}_1 \cup \partial\mathcal{P}_2) -]A,B[$ et donc

$$\mathrm{Card}(\partial(\mathcal{P}_1 \cup \mathcal{P}_2) \cap \mathbf{Z}^2) = \mathrm{Card}(\partial\mathcal{P}_1 \cap \mathbf{Z}^2) + \mathrm{Card}(\partial\mathcal{P}_2 \cap \mathbf{Z}^2) - 2\,\mathrm{Card}([A,B] \cap \mathbf{Z}^2) + 2\ . \tag{3}$$

On a

$$V(\mathcal{P}_1 \cup \mathcal{P}_2) = V(\mathcal{P}_1) + V(\mathcal{P}_2) \tag{4}$$

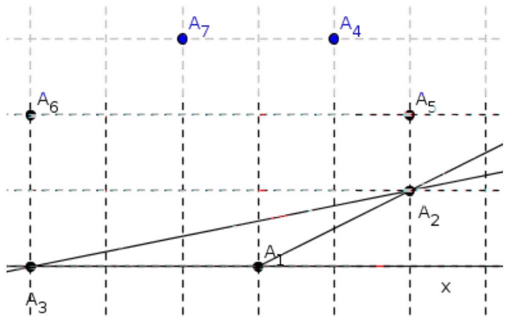
car $[A,B]$ est de mesure nulle. Donc $\mathcal{P}_1 \cup \mathcal{P}_2$ vérifie aussi la formule de Pick.

(d) Si $\mathcal{P}_1 \cup \mathcal{P}_2$ vérifie la formule de Pick, alors comme les équations (3) et (4) sont toujours vérifées, l'équation (2) est vérifiée. Si l'équation (1) pour $i = 1$ est vérifiée (c.-à-d. si $\mathcal{P}_1$ vérifie la formule de Pick), on en déduit que l'équation (1) pour $i = 2$ est aussi vérifiée ($\mathcal{P}_2$ vérifie aussi la formule de Pick).

6. On enferme le triangle ABC dans le rectangle de côtés parallèles aux axes minimal, c.-à-d. le rectangle

$$R = [\min(x_A, x_B, x_C), \max(x_A, x_B, x_C] \times [\min(y_A, y_B, y_C), \max(y_A, y_B, y_C]$$

qui a des sommets à coordonnées entières et vérifie la formule de Pick d'après 3(a). On peut décomposer R en une réunion à intérieurs disjoints du triangle ABC, de triangles rectangles à côtés de l'angle droit parallèles aux axes et sommets entiers qui vérifient la formule de Pick d'après 3(b)



(d) Si M n'appartient pas à l'enveloppe convexe de A_1, A_2, A_3 (le triangle $A_1A_2A_3$), alors M n'est pas dans le demi-plan fermé de frontière (A_2A_3) contenant A_1. Par conséquent le segment $[A_1, M]$ coupe la droite (A_2A_3), en un point $L \in [A_2, A_3]$ puisqu'il est contenu dans $\mathcal{P}$. Soit $L = \lambda A_2 + (1-\lambda)A_3$ avec $\lambda \in [0,1]$ et $A_1 = (1+\mu)L - \mu M$ avec $\mu > 0$. Alors, si $M = \sum_{i=1}^{N} \rho_i A_i$ avec les $\rho_i \geq 0$ et de somme 1, on a

$$M = \frac{\rho_2 + \lambda\rho_1(1+\mu)}{1+\rho_1\mu} A_2 + \frac{\rho_3 + (1-\lambda)\rho_1(1+\mu)}{1+\rho_1\mu} A_3 + \sum_{i=4}^{N} \frac{\rho_i}{1+\rho_1\mu} A_i \ ,$$

ce qui montre que M appartient à l'enveloppe convexe de $\{A_2, \ldots, A_n\}$. Par contraposition, on obtient le résultat cherché.

(e) On montre par récurrence sur N un résultat un peu plus précis que celui de l'énoncé : il existe $N-2$ triangles à sommets entiers d'intérieurs disjoints $\mathcal{T}_1, \ldots, \mathcal{T}_{N-2}$ dont la réunion est $\mathcal{P}$ et tels que pour tout entier strictement positif $k < N-2$, $\bigcup_{i=1}^{k} \mathcal{T}_i$ est un polygone à sommets entiers dont l'intersection avec $\mathcal{T}_{k+1}$ est un côté de ce triangle. Pour $N = 3$, $\mathcal{P}$ est un triangle. On suppose $N \geq 4$ et le résultat montré pour tout polygone enveloppe convexe de $N-1$ points entiers. Alors avec les notations de **(d)**, $\mathcal{P}$ est réunion du triangle $\mathcal{T} = A_1A_2A_3$ et du polygone $\mathcal{P}'$ enveloppe convexe de $\{A_2, \ldots, A_n\}$, et les intérieurs de $\mathcal{T}$ et $\mathcal{P}'$ sont disjoints puisque contenus dans deux demi-plans ouverts disjoints. L'hypothèse de récurrence appliquée à $\mathcal{P}'$ termine la démonstration du résultat annoncé.

8. **(a)** On utilise le résultat et les notations de **7(c)**. Chaque triangle $\mathcal{T}_i$ vérifie la formule de Pick par **6**. Grâce à **5(c)**, on montre par récurrence sur k que $\bigcup_{i=1}^{k} \mathcal{T}_i$, et au final $\mathcal{P}$, vérifie la formule de Pick.

(b) On a $V(n\mathcal{P}) = n^2 V(\mathcal{P})$. Par ailleurs $\partial(n\mathcal{P}) = n\partial\mathcal{P}$; la frontière $\partial\mathcal{P}$ est réunion de segments à extrémités entières, et chaque extrémité est adjacente à deux segments de la frontière (ceci peut se voir grâce à **7**). Le **2** montre que pour chaque segment $[A, B]$ à extrémités entières on a $\mathrm{Card}(n[A,B] \cap \mathbf{Z}^2) - 1 = n(\mathrm{Card}([A,B] \cap \mathbf{Z}^2) - 1)$, d'où l'on déduit que $\mathrm{Card}(n\partial\mathcal{P} \cap \mathbf{Z}^2) = n\,\mathrm{Card}(\partial\mathcal{P} \cap \mathbf{Z}^2)$. Enfin, puisque $n\mathcal{P}$ satisfait la formule de Pick d'après **(a)**, on a

$$\mathrm{Card}(\mathcal{P} \cap \mathbf{Z}^2) = n^2 V(\mathcal{P}) + \frac{n}{2}\,\mathrm{Card}(\partial\mathcal{P} \cap \mathbf{Z}^2) + 1 \ ,$$

ce qui est bien un polynôme de degré 2 en n.

III Le cas d'un simplexe

1. L'ensemble des $q \in \mathbf{Z}$ tels que $qA_i \in \mathbf{Z}^d$ pour $i = 1, \ldots, d+1$ est l'idéal de $\mathbf{Z}$ engendré par le ppcm des dénominateurs des coordonnées (écrites sous forme réduite) des A_i.

2. **(a)** Si $x \in n\mathcal{S}$, il existe un unique $(\rho_1, \ldots, \rho_{d+1}) \in [0,1]^{d+1}$ tel que $\sum_{i=1}^{d+1} \rho_i = 1$ et $x = \sum_{i=1}^{d+1} n\rho_i A_i$. Si

$$(x, n) = y + \sum_{i=1}^{d+1} n_i q(A_i, 1) \ ,$$

avec $n_i \in \mathbf{Z}$ et $y = \sum_{i=1}^{d+1} \lambda_i q(A_i, 1) \in \widehat{\mathcal{S}}$ (donc $0 \leq \lambda_i < 1$ pour $i = 1, \ldots, d+1$), alors $n\rho_i = (n_i + \lambda_i)q$ et donc $n_i = \lfloor n\rho_i/q \rfloor$ et $\lambda_i = n\rho_i/q - n_i$. Si maintenant on définit n_i et λ_i par ces formules pour $i = 1, \ldots, d+1$ alors $y = \sum_{i=1}^{d+1} \lambda_i q(A_i, 1) \in \widehat{\mathcal{S}}$ et $(x, n) = y + \sum_{i=1}^{d+1} n_i q(A_i, 1)$. On a établi l'unicité et l'existence de y et $(n_1, \ldots, n_{d+1})$.

(b) On a $\sum_{i=1}^{d+1} n_i q(A_i, 1) \in \mathsf{Z}^{d+1}$. Donc $y \in \widehat{\mathcal{S}} \cap \mathsf{Z}^{d+1}$ si et seulement si $(x, n) \in \mathsf{Z}^{d+1}$ si et seulement si $x \in \mathsf{Z}^d$.

3. Fixons $y = (z, \ell) \in \widehat{\mathcal{S}} \cap \mathsf{Z}^{d+1}$. Notons $w_{y,n}$ le nombre de $x \in n\mathcal{S}$ dont l'élément de $\widehat{\mathcal{S}} \cap \mathsf{Z}^{d+1}$ associé par **2** est y, et $W_y = \sum_{n\in\mathbf{N}} w_{y,n} T^n$. Alors, d'après **2**, $w_{y,n}$ est égal au nombre de $(n_1, \ldots, n_{d+1}) \in \mathsf{N}^{d+1}$ tel que $n = \ell + \sum_{i=1}^{d+1} n_i q$. On a donc $W_y = T^\ell (\sum_{n\in\mathbf{N}} T^{nq})^{d+1} = T^\ell (1 - T^q)^{-d-1}$.
Remarquons que $\widehat{\mathcal{S}} \cap \mathsf{Z}^{d+1}$ est fini car $\widehat{\mathcal{S}}$ est contenu dans la partie compacte de R^d image de $[0, 1]^{d+1}$ par l'application continue $(\lambda_1, \ldots, \lambda_{d+1}) \mapsto \sum_{i=1}^{d+1} \lambda_i A_i$. On a bien sûr $w_n = \sum_{y\in\widehat{\mathcal{S}}\cap\mathbf{Z}^{d+1}} w_{y,n}$ et

$$W = \sum_{y\in\widehat{\mathcal{S}}\cap\mathbf{Z}^{d+1}} W_y = \sum_{(z,\ell)\in\widehat{\mathcal{S}}\cap\mathbf{Z}^{d+1}} T^\ell (1 - T^q)^{-d-1} .$$

4. D'après **I.1**, il suffit de montrer que, si $\sum_{n\in\mathbf{N}} c_n T^n$ est le développement en série formelle de $F = \dfrac{T^\ell}{(1 - T^q)^{d+1}}$, alors $n \mapsto c_n$ est quasi-polynomiale. La fraction rationnelle F n'a pas de partie entière ; en effet, avec les notations de l'énoncé, $\ell = \sum_{i=1}^{d+1} \lambda_i q < (d + 1)q$ car les λ_i sont tous < 1. Il suffit donc de reprendre l'argument de **I.6** concernant les éléments simples de la forme $\dfrac{1}{(T - \zeta)^s}$, où ζ est une racine de l'unité. Puisque $s \le d + 1$, l'argument de **I.6** montre que tous les polynômes en n qui interviennent sont de degré $\le d$.

5. Nous avons vu que tous les polynômes qui interviennent dans la représentation de $n \mapsto w_n$ comme fonction quasi-polynomiale sont de degré $\le d$. Si D est la maximum des coefficients dominants de ces polynômes, il existe donc un entier N_0 tel que $w_n \le (D + 1)n^d$ pour $n \ge N_0$. En posant $C = \max(D + 1, w_1, \ldots, w_{N_0-1})$, on a $w_n \le Cn^d$ pour tout $n \ge 1$. Finalement, comme $w_0 = 1$, on a $w_n \le 1 + Cn^d$ pour tout $n \in \mathsf{N}$.

IV Applications

Si $\mathsf{a} = (a_1, \ldots, a_n) \in \mathsf{N}^d$, notons $\mathsf{X}^{\mathsf{a}} = \prod_{i=1}^d X_i^{a_i}$. On notera aussi $\mathsf{m} \cdot \mathsf{a} = \sum_{i=1}^d m_i a_i$. On appellera polynôme quasi-homogene de poids n les elements de $H_{\mathbf{m},n}$. Remarquons que $\pi_{\mathbf{m}}(PQ) = \pi_{\mathbf{m}}(P) + \pi_{\mathbf{m}}(Q)$.

1. (a) On a $\mathsf{X}^{\mathsf{a}} \in H_{\mathbf{m},\mathbf{m}\cdot\mathbf{a}}$.

   (b) $H_{\mathbf{m},n}$ contient 0, est stable par somme et par multiplication par un scalaire complexe ; c'est un sous-espace vectoriel de $\mathsf{C}[X_1, \ldots, X_d]$. Un polynôme P appartient à $H_{\mathbf{m},n}$ si et seulement si tous ses monômes X^{a} vérifient $\mathsf{m} \cdot \mathsf{a} = n$. La famille des monômes X^{a} tels que $\mathsf{m} \cdot \mathsf{a} = n$ constitue donc une base de $H_{\mathbf{m},n}$, qui est donc de dimension finie.

   (c) La dimension de $H_{\mathbf{m},n}$ est, d'après ce qui précède, égale au nombre des $(a_1, \ldots, a_d) \in \mathsf{N}^d$ tels que $\sum_{i=1}^d m_i a_i = n$. On a vu au **I** que ce nombre est une fonction quasi-polynomiale de n (l'argument pour v_n vaut aussi pour u_n).

   (d) La famille de tous les monômes X^{a} est une base de $\mathsf{C}[X_1, \ldots, X_n]$. Comme elle est partitionnée selon les valeurs de $\mathsf{m} \cdot \mathsf{a}$ en sous-familles qui forment des bases des $H_{\mathbf{m},n}$, $\mathsf{C}[X_1, \ldots, X_n]$ est la somme directe des $H_{\mathbf{m},n}$ pour n décrivant N.

2. g_0 est d'ordre N, donc $\pi(g_0)$ admet comme polynôme annulateur le polynôme $X^N - 1$ qui est scindé à racines simples sur C. Donc $\pi(g_0)$ est diagonalisable et ses valeurs propres qui sont des racines de $X^N - 1$ sont de la forme ξ^α. Il existe une base $(e_1, \ldots, e_d)$ de V et des entiers $\alpha_1; \ldots, \alpha_d$ tels que $\pi(g_0)(e_i) = \xi^{\alpha_i} e_i$.

3. On a $\widetilde{u}(P)(u(\mathsf{x})) = P(\mathsf{x})$ pour tout $\mathsf{x} \in \mathsf{C}^n$ si et seulement si $\widetilde{u}(P)(\mathsf{x}) = P(u^{-1}(\mathsf{x}))$ pour tout x. Donc $\widetilde{u}(P) = P(u^{-1}(\mathsf{X}))$ (avec l'abus de notation pour désigner le produit de la matrice de u^{-1} par le vecteur des indéterminées), et ceci est bien un automorphisme de $\mathsf{C}[\mathsf{X}]$, d'inverse $P \mapsto P(u(\mathsf{X}))$. Comme on a substitué une forme linéaire à chaque indéterminée, le degré total de $\widetilde{u}(P)$ est inférieur ou égal à celui de P ; on a l'inégalité dans l'autre sens car $P = \widetilde{u^{-1}}(\widetilde{u}(P))$ et donc $\deg(\widetilde{u}(P)) = \deg(P)$.

4. (a) Puisque τ est un automorphisme de C-algèbre, A contient 0, 1, est stable par somme et produit et stable aussi par multiplication par un scalaire complexe. C'est donc une sous-algèbre de $\mathsf{C}[\mathsf{X}]$.

   (b) On a $\tau(\mathsf{X}^{\mathsf{a}}) = \xi^{-\mathbf{m}\cdot\mathbf{a}} \mathsf{X}^{\mathsf{a}}$. Les monômes dans A sont donc les X^{a} tels que N divise $\mathsf{m} \cdot \mathsf{a}$.

(c) Soit $P \in \mathsf{C}[\mathsf{X}]$ et $P = \sum_{n=1}^{\pi(P)} P_n$ avec $P_n \in H_{\mathbf{m},n}$ sa décomposition en composantes quasi-homogènes. Alors $\tau(P) = \sum_{n=1}^{\pi(P)} \tau(P_n)$ avec $\tau(P_n) = \xi^{-n} P_n \in H_{\mathbf{m},n}$. Donc P est dans A si et seulement si ses composantes quasi-homogènes P_n sont dans A. Ceci entraîne que $A = \bigoplus_{n\in\mathbf{N}}(A \cap H_{\mathbf{m},n})$.

(d) Si $P \in H_{\mathbf{m},n}$, alors $\tau(P) = \xi^{-n}P$. Donc $A \cap H_{\mathbf{m},n} = H_{\mathbf{m},n}$ si N divise n et $A \cap H_{\mathbf{m},n} = \{0\}$ sinon. Ainsi la fonction $n \mapsto \dim(A \cap H_{\mathbf{m},n})$ est le produit de la fonction quasi-polynomiale $n \mapsto \dim(H_{\mathbf{m},n})$ par la fonction, visiblement quasi-polynomiale, qui envoie n sur 1 si $r_N(n) = 0$ et sur 0 sinon. Par **I.1**, elle est quasi-polynomiale.

5. (a) Soit u un monôme de S, et supposons que l'on ait $u = PQ$ avec $P, Q \in A$. Soit $h = \pi_{\mathbf{m}}(P)$, $k = \pi_{\mathbf{m}}(Q)$, P_h (resp. Q_k) la composante quasi-homogène non nulle de poids maximum de P (resp. Q). Alors P_hQ_k est la composante quasi homogène de poids maximum de PQ, donc $u = P_hQ_k$. Vu la définition de n_0 et le fait que $A \cap H_{\mathbf{m},n}$ est égal soit à $H_{\mathbf{m},n}$ soit à $\{0\}$, on a $A \cap H_{\mathbf{m},n} = \{0\}$ si $0 < n < n_0$. Comme $h + k = n_0$, on a $h = 0$ ou $k = 0$, c.-à-d. que soit P soit Q est une constante non nulle, autrement dit un élément inversible de A. Comme u n'est pas inversible, ceci montre que u est irréductible dans A.

(b) Pour $j = 1, \ldots, s$, on pose $u_j = \mathsf{X}^{\mathbf{b}_j}$, où $\mathsf{b}_j = (b_{1,j}, \ldots, b_{d,j})$. Soit B la matrice des $b_{i,j}$; elle est de taille $d \times s$ et donc de rang $\leq d < s$. Par conséquent son noyau dans Q^s n'est pas réduit à $\{0\}$. On choisit dans ce noyau un vecteur γ non nul à composantes $(\gamma_1, \ldots, \gamma_s)$ entières (ce que l'on peut faire). Posons $\alpha_i = \max(\gamma_i, 0)$ et $\beta_i = \max(-\gamma_i, 0)$. Alors $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_s)$ et $\beta = (\beta_1, \ldots, \beta_s)$ sont des éléments distincts de N^s et $B\alpha = B\beta$ parce que $\gamma = \alpha - \beta$. Ceci entraîne que

$$\prod_{i=1}^{s} u_i^{\alpha_i} = \prod_{i=1}^{s} u_i^{\beta_i}$$

.

(c) On vient de montrer deux décompositions d'un même élément de A en produit d'irréductibles non associés (les u_i) avec des puissances distinctes. Ceci montre que A ne peut pas être factoriel. Puisqu'un anneau de polynômes à un nombre fini de variables sur un corps est factoriel, A ne peut pas être isomorphe à un $\mathsf{C}[X_1, \ldots, X_\ell]$.