

Mathématiques Générales 1993 - Corrigé

M c C *

11 d'c . b 2012

PARTIE I Exemples de fonctions vérifiant des équations différentielles algébriques sur \mathbb{C}

Pour un polynôme P en plusieurs variables, on note $\deg P$ son degré total et $\deg_{X_i} P$ son degré par rapport à la variable X_i . On convient que le degré du polynôme nul est $-\infty$.

I.1. L'application exponentielle réelle

- L'ensemble des e^z pour z parcourant \mathbb{R} est infini. Donc, si $P(e^z) = 0$ pour tout $z \in \mathbb{R}$, le polynôme P est nul.
- On a $f' = f$, et donc $Q = X_1 - X_0$ vérifie $Q(f, f') = 0$.
- Si $P = (X_1 - X_0)R$, alors $P(f, f') = (f' - f)R(f) = 0$. Réciproquement, supposons $P(f, f') = 0$. On fait la division euclidienne de P par $X_1 - X_0$ par rapport à la variable X_1 ($X_1 - X_0$ est unitaire en X_1) :

$$P = (X_1 - X_0)R + S \quad \text{avec } \deg_{X_1} S < 1. \quad (1)$$

On a donc $S \in \mathbb{C}[X_0]$. De (1) on tire $0 = P(f, f') = (f' - f)R(f, f') + S(f) = S(f)$, d'où $S = 0$ d'après a.

- On a $f'' = f' = f$, donc si $P = (X_1 - X_0)R + (X_2 - X_0)S$ on obtient $P(f, f', f'') = (f' - f)R(f, f', f'') + (f'' - f)S(f, f', f'') = 0$. Réciproquement, supposons $P(f, f', f'') = 0$. On fait la division euclidienne de P par $X_2 - X_0$ par rapport à la variable X_2 ($X_2 - X_0$ est unitaire en X_2) :

$$P = (X_2 - X_0)S + T \quad \text{avec } \deg_{X_2} T < 1. \quad (2)$$

On a donc $T \in \mathbb{C}[X_0, X_1]$. De (2) on tire $0 = P(f, f', f'') = (f'' - f)S(f, f', f'') + T(f) = T(f)$, et ainsi il existe $R \in \mathbb{C}[X_0, X_1] \subset \mathbb{C}[X_0, X_1, X_2]$ tel que $T = (X_1 - X_0)R$ d'après d; au final, $P = (X_1 - X_0)R + (X_2 - X_0)S$.

- $0 \in J$, J est stable par addition et pour tout $P \in J$ et tout $S \in \mathbb{C}[X_0, X_1, X_2]$ on a $SP \in J$; ceci montre que J est un idéal de $\mathbb{C}[X_0, X_1, X_2]$. S'il était principal engendré par U , alors U devrait diviser $X_1 - X_0 \in J$ et donc $\deg_{X_2} U = 0$; de même U devrait diviser $X_2 - X_0 \in J$ et donc $\deg_{X_1} U = 0$. On aurait un polynôme $U \neq 0$ de $\mathbb{C}[X_0]$ tel que $U(f) = 0$, ce qui contredit a.

I.2. L'application $u \mapsto \sin u$.

- L'ensemble des $\sin u$ pour u parcourant \mathbb{R} est infini. Donc, si $P(\sin u) = 0$ pour tout $u \in \mathbb{R}$, le polynôme P est nul.
- $f'(u) = \cos u$ et si $Q = X_0^2 + X_1^2 - 1$ on a $Q(f, f') = 0$.
- On a

$$\forall u \in \mathbb{R} \quad U(\sin u) \cos u + V(\sin u) = 0. \quad (3)$$

Par le changement de variable $u \mapsto \pi - u$ on obtient

$$\forall u \in \mathbb{R} \quad -U(\sin u) \cos u + V(\sin u) = 0. \quad (4)$$

De (3) et (4) on tire $V(\sin u) = 0$ pour tout $u \in \mathbb{R}$, et donc $V = 0$ d'après a. On tire aussi $U(\sin u) \cos u = 0$ pour tout $u \in \mathbb{R}$, donc $U(\sin u) = 0$ pour tout u qui n'est pas de la forme $\pi/2 + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, et finalement par continuité $U(\sin u) = 0$ pour tout $u \in \mathbb{R}$. Donc $U = 0$ d'après a.

*remarques et questions bienvenues à michel.coste@univ-rennes1.fr

- d. J est un idéal (comme dans I.1.e). Montrons que l'élément $Q = X_0^2 + X_1^2 - 1$ de J engendre J . Soit $P \in J$, et faisons la division euclidienne de P par Q (unitaire en X_1) par rapport à la variable X_1 :

$$P = QR + S \quad \text{avec } \deg_{X_1} S < 2. \quad (5)$$

On a donc $S = UX_1 + V$ avec $U, V \in \mathbb{C}[X_0]$. De (5) on tire $0 = P(f, f') = (f^2 + f'^2 - 1)R(f, f') + U(f)f' + V(f) = U(f)f' + V(f)$. D'après c, on a $U = V = 0$ et Q divise bien P .

- e. L est bien un idéal de $\mathbb{C}[X_0, X_1, X_2]$, qui contient $X_0^2 + X_1^2 - 1$ et $X_0 + X_2$. Si L était un idéal principal engendré par W , on aurait $\deg_{X_2}(W) = 0$ car W divise $X_0^2 + X_1^2 - 1$. et $\deg_{X_1} W = 0$ car W divise $X_0 + X_2$. Ainsi $W \in \mathbb{C}[X_0]$ mais alors $W = 0$ par a, ce qui est absurde car $L \neq \{0\}$. Donc L n'est pas principal.

I.3. L'application $u \mapsto e^{u^2}$.

- a. Soit $P \in \mathbb{C}[X_0, X_1]$ non nul. Soit $d = \deg P$ et soit e le degré par rapport à X_1 de la partie homogène de degré d de P :

$$P = a_{d-e,e}X_0^{d-e}X_1^e + a_{d-e+1,e-1}X_0^{d-e+1}X_1^{e-1} + \dots + a_{d,0}X_0^d + \sum_{i+j < d} a_{i,j}X_0^iX_1^j \quad \text{où } a_{d-e,e} \neq 0.$$

On a $f'(u) = 2ue^{u^2}$ et donc

$$P(f, f')(u) = u^e e^{du^2} \left(2^e a_{d-e,e} + 2^{e-1} a_{d-e+1,e-1} u^{-1} + \dots + a_{d,0} u^{-e} + \sum_{i+j < d} 2^j a_{i,j} u^{j-e} e^{(i+j-d)u^2} \right)$$

est équivalent à $2^e a_{d-e,e} u^e e^{du^2}$ quand u tend vers $+\infty$. On ne peut donc pas avoir $P(f, f') = 0$.

- b. On a $f''(u) = (4u^2 + 2)e^{u^2}$. Donc $f''(u)f(u) = (4u^2 + 2)e^{2u^2} = f'(u)^2 + 2f(u)^2$. Le polynôme $Q = X_2X_0 - X_1^2 - 2X_0^2$ vérifie $Q(f, f', f'') = 0$.

Montrons que Q est irréductible dans $\mathbb{C}[X_0, X_1, X_2]$, ça nous servira plus tard. Puisque Q est de degré 1 en X_2 , toute factorisation de Q est de la forme $Q = U(X_2V + W)$ avec $U, V, W \in \mathbb{C}[X_0, X_1]$. Le polynôme U est un diviseur commun de X_0 et de $-X_1^2 - 2X_0^2$ dans $\mathbb{C}[X_0, X_1]$. Comme X_0 est irréductible et ne divise pas $-X_1^2 - 2X_0^2$, U est inversible. Ceci montre que Q est irréductible.

- c. Montrons que le polynôme Q du b engendre J . Soit $P \in J$. On fait la division euclidienne de P par Q dans l'anneau de polynômes en X_2 à coefficients dans le corps de fractions rationnelles $\mathbb{C}(X_0, X_1)$. Puisque Q est de degré 1 en X_2 , le reste est un élément de $\mathbb{C}(X_0, X_1)$. En chassant les dénominateurs, on obtient $SP = QT + R$ avec $R, S \in \mathbb{C}[X_0, X_1]$, S non nul et $T \in \mathbb{C}[X_0, X_1, X_2]$. On en déduit $0 = S(f, f')P(f, f', f'') = Q(f, f', f'')T(f, f', f'') + R(f, f') = R(f, f')$. D'après a, on a $R = 0$ et donc $SP = QT$ dans l'anneau factoriel $\mathbb{C}[X_0, X_1, X_2]$. Comme Q est irréductible dans cet anneau et ne divise pas S , Q divise P . Ceci montre que J est engendré par Q .

Il fallait bien faire attention ici au fait que le coefficient dominant de Q , considéré comme polynôme en X_2 à coefficients dans $\mathbb{C}[X_0, X_1]$, n'est pas inversible dans $\mathbb{C}[X_0, X_1]$. On ne peut donc faire la division euclidienne qu'à condition de se placer dans un anneau de coefficients où X_0 devient inversible.

PARTIE II Solutions holomorphes d'une équation fonctionnelle

- II.1 a. Montrons par récurrence sur n que

$$(1 - \rho) \prod_{k=0}^n (1 + \rho^{2^k}) = 1 - \rho^{2^{n+1}}.$$

Pour $n = 0$, on a $(1 - \rho)(1 + \rho) = 1 - \rho^2$, et si l'égalité est vérifiée pour n on a

$$(1 - \rho) \prod_{k=0}^{n+1} (1 + \rho^{2^k}) = (1 - \rho) \prod_{k=0}^n (1 + \rho^{2^k}) \times (1 + \rho^{2^{n+1}}) = (1 - \rho^{2^{n+1}})(1 + \rho^{2^{n+1}}) = 1 - \rho^{2^{n+2}}.$$

Donc, puisque $0 \leq \rho < 1$

$$\prod_{k=0}^n (1 + \rho^{2^k}) = \frac{1 - \rho^{2^{n+1}}}{1 - \rho} \leq \frac{1}{1 - \rho}.$$

b. On a $\theta_n(z) - \theta_{n+1}(z) = \theta_n(z) z^{2^{n+1}}$. Par ailleurs, d'après a., on a pour tout $z \in \Delta$ la majoration

$$|\theta_n(z)| = \prod_{k=0}^n |1 - z^{2^k}| \leq \prod_{k=0}^n (1 + |z|^{2^k}) \leq \frac{1}{1 - |z|}.$$

Par conséquent, pour tout $z \in \Delta$, on obtient

$$|\theta_n(z) - \theta_{n+1}(z)| \leq \frac{|z|^{2^{n+1}}}{1 - |z|}.$$

c. Pour tout $p > n$, on a d'après b., pour tout $|z| \in \Delta$:

$$|\theta_n(z) - \theta_{n+p}(z)| \leq \frac{\sum_{k=1}^p |z|^{2^{n+k}}}{1 - |z|} \leq |z|^{2^{n+1}} \frac{\sum_{\ell=0}^{\infty} |z|^\ell}{1 - |z|} = \frac{|z|^{2^{n+1}}}{(1 - |z|)^2}. \quad (6)$$

La suite $(\theta_n(z))_{n \in \mathbb{N}}$ vérifie donc le critère de Cauchy, et elle est convergente. Ceci montre que la suite de fonctions (θ_n) converge simplement vers une fonction θ sur Δ .

d. Par passage à la limite pour $p \rightarrow \infty$ dans la majoration (6), on obtient pour tout z vérifiant $|z| \leq \rho < 1$,

$$|\theta_n(z) - \theta(z)| \leq \frac{\rho^{2^{n+1}}}{(1 - \rho)^2}.$$

Ainsi la suite (θ_n) converge vers θ uniformément sur tout compact contenu dans Δ . Comme les θ_n sont holomorphes (ce sont des polynômes), on en déduit que θ est holomorphe sur Δ .

II.2 a. Pour tout $z \in \Delta$ et tout $n \in \mathbb{N}$, on a $\theta_{n+1}(z) = (1 - z)\theta_n(z^2)$ et donc, en passant à la limite pour $n \rightarrow \infty$, $\theta(z) = (1 - z)\theta(z^2)$.

b. Supposons qu'il existe $z_0 \in \Delta$ tel que $\theta(z_0) = 0$. Alors, d'après a. on a $(1 - z_0)\theta(z_0^2) = 0$, d'où $\theta(z_0^2) = 0$ puisque $z_0 \neq 1$. Une récurrence facile montre que $\theta(z_0^{2^n}) = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Comme $\lim_{n \rightarrow \infty} z_0^{2^n} = 0$, on en déduit par continuité $\theta(0) = 0$. Ceci est impossible, car $\theta_n(0) = 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, donc $\theta(0) = 1$.

La continuité suffit ici, on n'a pas besoin de faire appel au théorème des zéros isolés. Et si l'on fait appel à ce théorème, il faut montrer que θ n'est pas identiquement nulle.

c. Soit g le quotient f/θ ; c'est une fonction continue sur Δ , qui vérifie $g(z) = g(z^2)$ pour tout $z \in \Delta$. Soit $z_0 \in \Delta$. Par une récurrence facile $g(z_0) = g(z_0^{2^n})$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Or $\lim_{n \rightarrow \infty} z_0^{2^n} = 0$ et par continuité de g on obtient $g(z_0) = g(0)$. Ceci montre que g est constante sur Δ , et donc $f = f(0)\theta$.

II.3 a. La fonction $t \mapsto e^t$ est holomorphe sur \mathbb{C} et envoie Π dans Δ car $|e^t| = e^{\operatorname{Re}(t)}$. Comme θ est holomorphe sur Δ et ne s'y annule pas, la fonction

$$\phi : t \mapsto \frac{e^t \theta'(e^t)}{\theta(e^t)}$$

est holomorphe sur Π .

b. En dérivant la relation fonctionnelle obtenue en II.2.a., on obtient $\theta'(z) = -\theta(z^2) + 2z(1 - z)\theta'(z^2)$. On en déduit

$$\phi(t) = \frac{e^t \theta'(e^t)}{\theta(e^t)} = \frac{e^t (-\theta(e^{2t}) + 2e^t(1 - e^t)\theta'(e^{2t}))}{(1 - e^t)\theta(e^{2t})} = \frac{2e^{2t}\theta'(e^{2t})}{\theta(e^{2t})} - \frac{e^t}{1 - e^t} = 2\phi(2t) + \frac{e^t}{e^t - 1}.$$

c. Pour $k = 0$, la formule à établir est celle de b. avec $S_0(z) = \frac{z}{z - 1}$. Supposons que, pour l'entier naturel k , on ait établi

$$\phi^{(k)}(t) = 2^{k+1}\phi^{(k)}(2t) + S_k(e^t).$$

En dérivant, on obtient

$$\phi^{(k+1)}(t) = 2^{k+2}\phi^{(k+1)}(2t) + e^t S'_k(e^t) = 2^{k+2}\phi^{(k+1)}(2t) + S_{k+1}(e^t),$$

où S_{k+1} est la fraction rationnelle définie par $S_{k+1}(z) = z S'_k(z)$. Par récurrence, la formule demandée est bien établie pour tout entier naturel.

PARTIE III Quelques résultats sur les fractions rationnelles et les polynômes

III.A Fractions rationnelles à une indéterminée

III.A.1. (a) Soit $\frac{P}{Q} = \frac{A}{B} \neq 0$. Ceci veut dire que $PB = QA$, donc $\deg(P) + \deg(B) = \deg(Q) + \deg(A)$, d'où $\deg(P) - \deg(Q) = \deg(A) - \deg(B)$. Le degré d'une fraction rationnelle ne dépend pas du choix de son représentant.

Soient $R = A/B$ et $S = C/D$. Il suffit de considérer le cas où R et S sont tous les deux non nuls. Alors

$$\begin{aligned} \deg(R + S) &= \deg(AD + BC) - \deg(BD) \leq \max(\deg(AD), \deg(BC)) - \deg(BD) \\ &\leq \max(\deg(AD) - \deg(BD), \deg(BC) - \deg(BD)) = \max(\deg(R), \deg(S)) . \end{aligned}$$

(b) On vérifie que $\deg(R) + \deg(S) \leq \max(\deg(R), \deg(S))$ et que $\deg(\lambda R) = \deg(R)$ pour tout $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Donc $\mathbb{C}_0(z)$ contient 0, est stable par addition et par multiplication par un scalaire : c'est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{C}(z)$. Puisque V et W sont engendrés par des éléments de $\mathbb{C}_0(z)$, ce sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{C}_0(z)$.

Il faut bien se garder de croire que V est l'ensemble des fractions rationnelles de degré -1 et W celui des fractions rationnelles de degré < -1 . Par exemple, $\frac{1}{z(z-1)} = \frac{1}{z-1} - \frac{1}{z}$ est de degré -2 , mais appartient à V .

(c) La décomposition en éléments simples nous dit que toute fraction rationnelle $R \in \mathbb{C}(z)$ se décompose **de manière unique** en

$$R = E + \sum_{\gamma \in \mathbb{C}, n \geq 1} \frac{a_{\gamma,n}}{(z-\gamma)^n} = E + \sum_{\gamma \in \mathbb{C}} \frac{a_{\gamma,1}}{z-\gamma} + \sum_{\gamma \in \mathbb{C}, n \geq 2} \frac{a_{\gamma,n}}{(z-\gamma)^n} ,$$

où E est un polynôme et les $a_{\gamma,n}$ des nombres complexes tous nuls sauf un nombre fini. Comme E est le quotient de la division euclidienne du numérateur de R par son dénominateur, si $R \in \mathbb{C}_0(z)$ alors $E \in \mathbb{C}$. Autrement dit, la famille formée de la constante 1 et des $\frac{1}{(z-\gamma)^n}$ pour $\gamma \in \mathbb{C}$ et $n \geq 1$ forme une base de $\mathbb{C}_0(z)$. Ceci montre $\mathbb{C}_0(z) = \mathbb{C} \oplus V \oplus W$ (par partition de la base).

Il faut bien prendre garde au fait que $\mathbb{C} \cap V = \mathbb{C} \cap W = V \cap W = \{0\}$ ne montre pas que la somme $\mathbb{C} + V + W$ est directe ! On peut penser au cas de trois droites vectorielles distinctes dans un plan vectoriel, dont les intersections deux à deux sont réduites à $\{0\}$; pourtant, le plan n'est pas la somme directe des trois droites.

III.A.2. La dérivée d'une constante est nulle et, pour tout entier $n \geq 1$, $\left(\frac{1}{(z-\gamma)^n}\right)' = \frac{-n}{(z-\gamma)^{n+1}} \in W$. Donc l'image de $\mathbb{C}_0(z)$ par la dérivation est contenue dans W , et est bien égale à W puisque la formule précédente montre que, pour $n \geq 2$, $\frac{1}{(z-\gamma)^n}$ est la dérivée d'un élément de $\mathbb{C}_0(z)$.

III.A.3. Puisque μ est linéaire, il suffit pour vérifier la stabilité de s'intéresser aux générateurs.

Si $R(z) = \frac{1}{z^n}$, alors $\mu(R)(z) = \frac{1}{z^{2n-1}}$ et $\mu(R)$ appartient à V si $n = 1$ et à W si $n \geq 2$.

Soit $\gamma \in \mathbb{C}$ non nul, et α une racine carrée de γ .

Si $R = \frac{1}{z-\gamma}$, calculons

$$\mu(R)(z) = \frac{z}{z^2 - \gamma} = \frac{1}{2(z-\alpha)} + \frac{1}{2(z+\alpha)} .$$

On a $\mu(R) \in V$.

Si $R = \frac{1}{(z-\gamma)^n}$ avec $n \geq 2$, alors $\mu(R)(z) = \frac{z}{(z^2-\gamma)^n}$ est la dérivée de $\frac{1}{2(1-n)(z^2-\gamma)^{n-1}} \in \mathbb{C}_0(z)$, donc $\mu(R) \in W$ d'après la question 2. On peut aussi raisonner sur la décomposition en éléments simples

$$\mu(R)(z) = \frac{z}{(z^2-\gamma)^n} = \frac{a}{z-\alpha} + \frac{b}{z+\alpha} + \sum_{k=2}^n \left(\frac{c_k}{(z-\alpha)^k} + \frac{d_k}{(z+\alpha)^k} \right) ,$$

où a, b, c_k, d_k sont des nombres complexes. Puisque $\mu(R)$ est une fonction impaire de z , on a $a = b$. En multipliant par z et en faisant tendre $|z|$ vers l'infini, on trouve comme limite à gauche 0 et à droite $a + b$. Donc $a = b = 0$, et $\mu(R)$ appartient à W .

Au total on a montré que V et W sont stables par μ .

III.A.4. Soit $R(z) = \frac{1}{(z^2 - \alpha^2)^n} = \frac{1}{(z - \alpha)^n(z + \alpha)^n}$. Alors $r(\alpha, n)$ s'obtient en faisant $z = \alpha$ dans $(z - \alpha)^n R(z)$, ce qui donne $r(\alpha, n) = \frac{1}{2^n \alpha^n}$.

III.B Polynômes à $(n + 1)$ indéterminées

III.B.1. Ordre sur \mathbb{N}^{n+1} .

Si $\alpha = (\alpha_0, \dots, \alpha_{n+1}) \in \mathbb{N}^{n+2}$, on notera $\alpha' = (\alpha_0, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{N}^{n+1}$.

- (a) Montrons par récurrence sur n que \mathcal{R}_n est une relation d'ordre pour tout $n \in \mathbb{N}$. C'est vrai pour $n = 0$. Supposons que c'est vrai pour n et montrons-le pour $n + 1$.
- \mathcal{R}_{n+1} est réflexive. Pour tout $\alpha \in \mathbb{N}^{n+1}$ on a $\alpha_{n+1} = \alpha_{n+1}$ et $\alpha' \mathcal{R}_n \alpha'$ par hypothèse de récurrence.
 - \mathcal{R}_{n+1} est antisymétrique. Si $\alpha \mathcal{R}_{n+1} \beta$, alors forcément $\alpha_{n+1} = \beta_{n+1}$ et $\alpha' \mathcal{R}_n \beta'$ et $\beta' \mathcal{R}_n \alpha'$. Donc, par hypothèse de récurrence, $\alpha' = \beta'$ et $\alpha = \beta$.
 - \mathcal{R}_{n+1} est transitive. Supposons $\alpha \mathcal{R}_{n+1} \beta \mathcal{R}_{n+1} \gamma$. Si $\alpha_{n+1} < \beta_{n+1}$ ou $\beta_{n+1} < \gamma_{n+1}$, alors $\alpha_{n+1} < \gamma_{n+1}$ et $\alpha \mathcal{R}_{n+1} \gamma$. Reste le cas $\alpha_{n+1} = \beta_{n+1} = \gamma_{n+1}$ et $\alpha' \mathcal{R}_n \beta' \mathcal{R}_n \gamma'$. Alors par hypothèse de récurrence $\alpha' \mathcal{R}_n \gamma'$ et donc $\alpha \mathcal{R}_{n+1} \gamma$.
- (b) Montrons par récurrence sur n que toute partie non vide de \mathbb{N}^{n+1} admet un plus petit élément pour \mathcal{R}_n . C'est vrai pour $n = 0$. Supposons que c'est vrai pour n . Soit E une partie non vide de \mathbb{N}^{n+1} . Soit α_{n+1} le minimum des β_{n+1} pour $\beta \in E$. Posons $E' = \{\beta' \in \mathbb{N}^{n+1} \mid (\beta', \alpha_{n+1}) \in E\}$. Puisque E' est une partie non vide de \mathbb{N}^{n+1} , l'hypothèse de récurrence entraîne qu'il existe un plus petit élément α' de E' pour \mathcal{R}_n . Alors $\alpha = (\alpha', \alpha_{n+1})$ est le plus petit élément de E pour \mathcal{R}_{n+1} .
- La propriété est bien établie par récurrence.
- (c) Soient α et β des éléments de \mathbb{N}^{n+1} . Puisque $\{\alpha, \beta\}$ admet un plus petit élément pour \mathcal{R}_n d'après b), on a $\alpha \mathcal{R}_n \beta$ ou $\beta \mathcal{R}_n \alpha$. Ceci montre que \mathcal{R}_n est un ordre total.
- (d) Un ensemble non vide totalement ordonné fini admet un plus grand élément. Donc, d'après c), tout sous-ensemble non vide fini E de \mathbb{N}^{n+1} admet un plus grand élément pour \mathcal{R}_n , qu'on notera $\max E$.

III.B.2. Multidegré d'un polynôme de $K[X_0, X_1, \dots, X_n]$.

- (a) On suppose que $P = \sum_{\alpha \in \mathbb{N}^{n+1}} p_\alpha X^\alpha$ et $Q = \sum_{\alpha \in \mathbb{N}^{n+1}} q_\alpha X^\alpha$ ont même multidegré $\delta = d(P) = d(Q)$. Par conséquent, pour tout $\alpha \in \mathbb{N}^{n+1}$, $p_\alpha \neq 0$ entraîne $\alpha \mathcal{R}_n \delta$ et $q_\alpha \neq 0$ entraîne $\alpha \mathcal{R}_n \delta$. Soit $E = \{\alpha \in \mathbb{N}^{n+1} \mid p_\delta q_\alpha - q_\delta p_\alpha \neq 0\}$. Alors E est fini, $\delta \notin E$ et $\alpha \mathcal{R}_n \delta$ pour tout $\alpha \in E$ d'après ce qui précède. Donc ou bien E est vide et alors $p_\delta Q - q_\delta P = 0$, ou bien E est non vide et alors $\max E = d(p_\delta Q - q_\delta P)$ vérifie $\max E \neq \delta$ et $\max E \mathcal{R}_n \delta$.
- (b) Si $J \neq \{0\}$, l'ensemble des multidegrés des éléments non nuls de J est non vide et admet un plus petit élément δ . Soit $M \in J$ tel que $d(M) = \delta$. Soit $P \in J \setminus \{0\}$ tel que $d(P) = \delta$. Alors, par définition de δ , $d(P) = \delta$. Soit m_δ (resp. p_δ) le coefficient dominant de M (resp. P), et posons $Q = p_\delta M - m_\delta P$; on a $Q \in J$. D'après a), si $Q \neq 0$ alors $d(Q) \mathcal{R}_n \delta$ et $d(Q) \neq \delta$, ce qui est impossible vu la définition de δ . Donc $Q = 0$, et $P = \frac{p_\delta}{m_\delta} M$.

III.B.3. Pour $\alpha = (\alpha_0, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{N}^{n+1}$, on pose $|\alpha| = \alpha_0 + \dots + \alpha_n$. On note

$$\frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial X^\alpha} = \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial X_0^{\alpha_0} \dots \partial X_n^{\alpha_n}}$$

Le degré total d'un polynôme $P = \sum_{\alpha \in \mathbb{N}^{n+1}} p_\alpha X^\alpha$ non nul est $\deg P = \max\{|\alpha| \mid p_\alpha \neq 0\}$. Pour tout monôme X^β on a $\deg \frac{\partial^{|\alpha|} X^\beta}{\partial X^\alpha} = |\beta| - |\alpha|$ si $\alpha_i \leq \beta_i$ pour tout i entre 0 et n , et $\frac{\partial^{|\alpha|} X^\beta}{\partial X^\alpha} = 0$ sinon. On en déduit que, pour tout polynôme P non nul, $\frac{\partial^{|\alpha|} P}{\partial X^\alpha} = 0$ ou $\deg \frac{\partial^{|\alpha|} P}{\partial X^\alpha} \leq \deg P - |\alpha|$.

Soit $P = \sum_{\alpha \in \mathbb{N}^{n+1}} p_\alpha X^\alpha$ un polynôme non constant. Choisissons $\beta = (\beta_0, \dots, \beta_n) \in \mathbb{N}^{n+1}$ tel que $p_\beta \neq 0$ et $|\beta| = \deg P$ et ℓ entre 0 et n tel que $\beta_\ell > 0$. Soit $i = (i_0, \dots, i_n)$ défini par $i_k = \beta_k$ pour $k \neq \ell$ et $i_\ell = \beta_\ell - 1$. Alors $|i| = \deg P - 1$, donc $\frac{\partial^{|i|} P}{\partial X^i} = 0$ ou $\deg \frac{\partial^{|i|} P}{\partial X^i} \leq 1$. Mais comme $\frac{\partial^{|i|} X^\beta}{\partial X^i} = \beta_0! \cdots \beta_n! X_\ell$ et que $p_\beta \neq 0$, on a bien $\deg \frac{\partial^{|i|} P}{\partial X^i} = 1$, ce qui montre que $\frac{\partial^{|i|} P}{\partial X^i}$ est un polynôme affine non constant.

Voici un autre raisonnement utilisant le multidegré $d(P) = (j_0, \dots, j_n)$. On raisonne par récurrence sur n . Si $n = 0$, on dérive jusqu'à trouver un polynôme du premier degré en X_0 . Supposons $n > 0$ et le résultat établi pour $n - 1$. Si $(j_0, \dots, j_{n-1}) \neq (0, \dots, 0)$, alors $\frac{\partial^{j_n} P}{\partial X_n^{j_n}}$ est un polynôme non constant en X_0, \dots, X_{n-1} et on utilise l'hypothèse de récurrence. Sinon, forcément $j_n \neq 0$ et $\frac{\partial^{j_n-1} P}{\partial X_n^{j_n-1}} = cX_n + Q(X_0, \dots, X_{n-1})$, où c est une constante. Si Q est de degré total ≤ 1 , c'est fini. Sinon, on peut trouver i , $0 \leq i \leq n - 1$, tel que $\frac{\partial^{j_n} P}{\partial X_n^{j_n-1} \partial X_i} = \frac{\partial Q}{\partial X_i}$ soit un polynôme non constant en X_0, \dots, X_{n-1} et on peut alors appliquer l'hypothèse de récurrence.

PARTIE IV On se propose de montrer que la fonction θ définie dans la question II.1.c ne vérifie pas d'équation différentielle algébrique sur $\mathbb{C}(z)$.

IV.1 (a) Montrons par récurrence sur k qu'il existe un polynôme $Q_k \in \mathbb{C}[Z_0, \dots, Z_{k-1}]$, de la forme $Q_k = Z_{k-1} + U_k$ où Z_{k-1} ne figure pas dans U_k (et donc Q_k de multidegré $(0, \dots, 0, 1)$), tel que $\theta^{(k)} = \theta Q_k(g, g', \dots, g^{(k-1)})$.

Puisque $\theta' = \theta g$, en posant $Q_1 = Z_0$, on trouve bien $\theta' = \theta Q_1(g)$; et Q_1 est de la forme indiquée.

Supposons connu $Q_k = Z_{k-1} + U_k$ vérifiant la propriété ci-dessus. Alors

$$\begin{aligned} \theta^{(k+1)} &= \theta' Q_k(g, \dots, g^{(k-1)}) + \theta \sum_{i=0}^{k-1} \frac{\partial Q_k}{\partial Z_i}(g, \dots, g^{(k-1)}) g^{(i+1)} \\ &= \theta (Q_1(g) Q_k(g, \dots, g^{(k-1)})) + \sum_{i=0}^{k-2} \frac{\partial U_k}{\partial Z_i}(g, \dots, g^{(k-2)}) g^{(i+1)} + g^{(k)} \\ &= \theta Q_{k+1}(g, \dots, g^{(k-1)}, g^{(k)}), \end{aligned}$$

où $Q_{k+1} = Z_k + Q_1 Q_k + \sum_{i=0}^{k-2} \frac{\partial U_k}{\partial Z_i} Z_{i+1}$ est bien de la forme voulue.

(b) Soit $M = T_0^{\alpha_0} \cdots T_n^{\alpha_n}$ un monôme de degré total d . Alors $M(1, Q_1, \dots, Q_n) = Q_1^{\alpha_1} \cdots Q_n^{\alpha_n}$ est, d'après ce qu'on sait des multidegrés des Q_k , de multidegré $(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$. Et puisque $\alpha_0 = d - \sum_{i=1}^n \alpha_i$, deux monômes différents de même degré total d donnent, après substitution, des polynômes de multidegrés différents. On en déduit que si $H \in \mathbb{C}(z)[T_0, \dots, T_n]$ est un polynôme homogène non nul, de degré total d et de multidegré $(\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n)$, alors $H(1, Q_1, \dots, Q_n) \in \mathbb{C}(z)[Z_0, \dots, Z_{n-1}]$ est non nul de multidegré $(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$.

IV.2 Soit

$$P(\theta, \theta', \dots, \theta^{(n)}) = 0 \quad (7)$$

(où $P \in \mathbb{C}(z)[T_0, \dots, T_n]$ est un polynôme de degré total $d > 0$) une équation différentielle algébrique vérifiée par θ . On peut supposer que n est le plus petit entier pour lequel une telle équation existe, et donc $\frac{\partial P}{\partial T_n} \neq 0$, et aussi que le degré de P est minimum, et donc $\frac{\partial P}{\partial T_n}(\theta, \theta', \dots, \theta^{(n)}) \neq 0$. En dérivant l'équation (7) on obtient

$$S(\theta, \theta', \dots, \theta^{(n)}) + \theta' \frac{\partial P}{\partial T_0}(\theta, \dots, \theta^{(n)}) + \cdots + \theta^{(n+1)} \frac{\partial P}{\partial T_n}(\theta, \dots, \theta^{(n)}) = 0, \quad (8)$$

où S est le polynôme dont les coefficients sont les dérivées de ceux de P . L'égalité (8) et le fait que $\frac{\partial P}{\partial T_n}(\theta, \theta', \dots, \theta^{(n)}) \neq 0$ montrent que $\theta^{(n+1)}$ appartient au corps $K = \mathbb{C}(z, \theta, \dots, \theta^{(n)})$. D'après

les égalités $\theta' = g\theta$ et $\theta^{(k)} = (g^{(k-1)} + U_k(g, \dots, g^{(k-2)}))\theta$ pour $k \geq 2$ établies en 1.a, on a $K = \mathbb{C}(z, \theta, g, g', \dots, g^{(n-1)})$. Puisque $\theta^{(n+1)}$ appartient à K , $g^{(n)} = \theta^{(n+1)} - U_{n+1}(g, \dots, g^{(n-1)})$ appartient aussi à K .

En utilisant 1.a, on a

$$P(\theta, \theta Q_1(g), \dots, \theta Q_n(g, \dots, g^{(n-1)})) = 0.$$

Décomposons P en composantes homogènes : $P = \sum_{k=0}^d P_k$. On obtient alors

$$\sum_{k=0}^d P_k(1, Q_1(g), \dots, Q_n(g, \dots, g^{(n-1)})) \theta^k = 0.$$

On sait d'après 1.b que le polynôme $P_d(1, Q_1, \dots, Q_n)$ est non nul. Donc si

$$P_d(1, Q_1(g), \dots, Q_n(g, \dots, g^{(n-1)})) = 0,$$

on a déjà trouvé une équation différentielle algébrique sur $\mathbb{C}(z)$ vérifiée par g .

Sinon, on arrive à la conclusion que θ est algébrique sur le corps $\mathbb{C}(z, g, g', \dots, g^{(n-1)})$ et donc que K est une extension algébrique de $\mathbb{C}(z, g, g', \dots, g^{(n-1)})$. Donc $g^{(n)}$, qui appartient à K , est algébrique sur $\mathbb{C}(z, g, g', \dots, g^{(n-1)})$ et le polynôme minimal de $g^{(n)}$ sur ce corps fournit une équation différentielle algébrique sur $\mathbb{C}(z)$ satisfaite par g .

IV.3 On a, pour tout $t \in \Pi$, $g(e^t) = e^{-t} \phi(t)$ et on vérifie par récurrence sur k qu'il existe pour tout $k \geq 0$ des entiers $\lambda_{k,1}, \dots, \lambda_{k,k}$ tels que $g^{(k)}(e^t) = e^{-kt} (\phi^{(k)}(t) + \sum_{i=1}^k \lambda_{k,i} \phi^{(k-i)}(t))$. En effet, en dérivant l'égalité précédente et en divisant par e^t , on obtient

$$g^{(k+1)}(e^t) = e^{-(k+1)t} \left(\phi^{(k+1)}(t) + \sum_{i=1}^k \lambda_{k,i} \phi^{(k+1-i)}(t) - k \phi^{(k)}(t) - k \sum_{i=1}^k \lambda_{k,i} \phi^{(k-i)}(t) \right).$$

Soit P non nul de $\mathbb{C}(z)[Z_0, \dots, Z_n]$ tel que $P(g, \dots, g^{(n)}) = 0$ (l'existence d'un tel P est donné par la question 2). Faisons le changement de variables $z = \exp(t)$, $Z_0 = \exp(t)^{-1} T_0$, $Z_k = \exp(t)^{-k} (T_k + \sum_{i=1}^k \lambda_{k,i} T_{k-i})$ dans P ; on obtient un polynôme $Q \in L[T_0, \dots, T_n]$ de même multidegré que P , en particulier $Q \neq 0$. D'après ce qui précède, on a $Q(\phi, \phi', \dots, \phi^{(n)}) = 0$, ce qui montre que ϕ vérifie une équation différentielle algébrique sur L .

IV.4 Soit $M \neq 0$ de multidegré minimal dans l'idéal des $Q \in L[X_0, \dots, X_n]$ tels que $Q(\phi, \phi', \dots, \phi^{(n)}) = 0$ (où n est tel que cet idéal est non nul, d'après 3). Alors

$$0 = M^*(\phi^*, \dots, \phi^{(n)*}) = M^*\left(\frac{1}{2}(\phi - R_0), \dots, \frac{1}{2^{n+1}}(\phi^{(n)} - R_n)\right) \quad (9)$$

d'après II.3. Donc $M^*(\frac{1}{2}(\phi - R_0), \dots, \frac{1}{2^{n+1}}(\phi^{(n)} - R_n))$ est aussi dans l'idéal, et il a même multidegré que M . D'après III.B.2, il est égal à λM , où λ est un élément non nul de L .

IV.5 a. Par III.B.3 on peut dériver M pour trouver un polynôme affine non constant $U = \frac{\partial^{|i|} M}{\partial X^i}$. Il existe $c \in \mathbb{Q}$ non nul tel que

$$\frac{\partial^{|i|} M}{\partial X^i} M^*\left(\frac{1}{2}(X_0 - R_0), \dots, \frac{1}{2^{n+1}}(X_n - R_n)\right) = c U^*\left(\frac{1}{2}(X_0 - R_0), \dots, \frac{1}{2^{n+1}}(X_n - R_n)\right),$$

d'où, en posant $\mu = \lambda/c$ élément non nul de L ,

$$U^*\left(\frac{1}{2}(X_0 - R_0), \dots, \frac{1}{2^{n+1}}(X_n - R_n)\right) = \mu U \quad (10)$$

b. Posons $U = \sum_{i=0}^n p_i X_i + q$, avec $p_i, q \in L$. L'égalité (10) donne $\frac{1}{2^{i+1}} p_i^* = \mu p_i$ pour $i = 0, \dots, n$.

On a $p_i = A_i(e^t)$ et $\mu = C(e^t)$ avec A_i et C dans $\mathbb{C}(z)$. Il vient $\frac{1}{2^{i+1}} A_i(z^2) = C(z) A_i(z)$. Si $A_i \neq 0$, alors il existe $a_i \in \mathbb{C}$ non nul et $k_i \in \mathbb{Z}$ tels que $A_i(z) \sim a_i z^{k_i}$ quand $|z| \rightarrow \infty$, d'où $C(z) \sim \frac{z^{k_i}}{2^{i+1}}$. Donc il y a exactement un A_i non nul, soit A_m , et $\mu = \frac{p_m^*}{2^{m+1} p_m}$. L'identification des termes constants dans (10) donne

$$-p_m^* \frac{R_m}{2^{m+1}} + q^* = \frac{p_m^*}{2^{m+1} p_m} q,$$

d'où $R_m = 2^{m+1} u^* - u$ avec $u = \frac{q}{p_m}$.

c. On a donc pour tout $t \in \Pi$, $S_m(e^t) = 2^{m+1}\nu(e^{2t}) - \nu(e^t)$ avec $\nu(z) \in \mathbb{C}(z)$, d'où $S_m(z) = 2^{m+1}\nu(z^2) - \nu(z)$.

IV.6 De $S_0(z) = 1 + \frac{1}{z-1}$ et $S_{k+1}(z) = zS'(z)$ il résulte que 1 est le seul pôle de $S_m(z)$. On remarque que si a est pôle de $\nu(z^2)$ alors a^2 est pôle de $\nu(z)$ et que si a^2 est pôle de $\nu(z)$ alors a et $-a$ sont pôles de $\nu(z^2)$. Nécessairement 1 est pôle de $\nu(z)$. Alors -1 est pôle de $\nu(z^2)$, donc il doit l'être aussi de $\nu(z)$ (sinon, -1 serait pôle de S_m). Alors i est pôle de $\nu(z^2)$, donc de $\nu(z)$ et par récurrence on a $e^{i\pi/2^n}$ pôle de $\nu(z)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, ce qui fait trop de pôles pour une fraction rationnelle.

PARTIE V Généralisation

V.1 a. Soit $z \in \Delta$. On pose $\theta_n(z) = \prod_{k=0}^n R(z^{2^k})$. Quand k tend vers l'infini, z^{2^k} tend vers 0 et $R(z^{2^k})$ tend vers 1. Donc $\ln(R(z^{2^k}))$ est équivalent à $z^{2^k} R'(0)$ (où \ln est la détermination principale du logarithme). La série de terme général z^{2^k} converge absolument et uniformément sur tout compact de Δ , donc il en est de même pour la série de terme général $\ln(R(z^{2^k}))$. De manière précise, pour tout ρ avec $0 < \rho < 1$, il existe un entier naturel N tel que pour $|z| \leq \rho$ et $k \geq N$ on a $|1 - R(z^{2^k})| < 1$, et $\sum_{k=N}^{\infty} \ln(R(z^{2^k}))$ converge absolument et uniformément sur le disque fermé de rayon ρ . Alors $\theta_n(z)$ converge uniformément sur tout compact de Δ vers une fonction θ holomorphe sur Δ . Comme $\theta_n(z^2) R(z) = \theta_{n+1}(z)$, on a par passage à la limite $\theta(z^2) R(z) = \theta(z)$, et $\theta(0) = 1$ est clair.

Puisque $R(0) = 1$, il existe r , $0 < r < 1$, tel que R n'ait aucun zéro dans $\Delta' = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < r\}$. On montre alors comme en II.2.b que θ ne s'annule pas sur Δ' . Soit ϕ une autre fonction holomorphe sur Δ telle que $\phi(0) = 1$ et $\phi(z^2) R(z) = \phi(z)$ pour tout $z \in \Delta$. On montre comme en II.2.c que $\phi = \theta$ sur Δ' et donc aussi sur Δ par prolongement analytique. Ainsi θ est la seule fonction holomorphe sur Δ vérifiant $\theta(0) = 1$ et $\theta(z^2)R(z) = \theta(z)$ pour tout $z \in \Delta$.

b. En remplaçant z par e^t (où $t \in \Pi$) il vient $\theta(e^t) = \theta(e^{2t}) R(e^t)$. En dérivant et en divisant par $\theta(e^t)$ (de sorte qu'on est maintenant dans le corps de fonctions méromorphes $M(\Pi)$) il vient

$$e^t \frac{\theta'(e^t)}{\theta(e^t)} = 2e^{2t} \frac{\theta'(e^{2t})}{\theta(e^{2t})} + e^t \frac{R'(e^t)}{R(e^t)},$$

c.-à-d. $f(t) = 2f(2t) + S_0(e^t)$ avec $S_0(z) = z \frac{R'(z)}{R(z)} \in \mathbb{C}(z)$. En définissant par récurrence $S_{k+1}(z) = z S'_k(z) \in \mathbb{C}(z)$, il vient en dérivant $f^{(k)}(t) = 2^{k+1} f^{(k)}(2t) + S_k(e^t)$.

V.2 On remarque par récurrence sur k que $S_k(z) \in \mathbb{C}_0(z)$, et donc d'après III.A.2 on a $S'_k(z) \in W$ pour tout entier naturel k . De $S_m(z) = 2^{m+1}\nu(z^2) - \nu(z)$ on déduit, si $m > 0$, $S'_{m-1}(z) = 2^{m+1}z \frac{\nu(z^2)}{z^2} - \frac{\nu(z)}{z}$. Si $\nu(z) \sim az^d$ quand $|z|$ tend vers l'infini, avec $d > 0$, alors $S_m(z) \sim 2^{m+1}a z^{2d}$, ce qui est impossible car $S_m(z) \in \mathbb{C}_0(z)$. Donc $\nu(z) \in \mathbb{C}_0(z)$, et $\rho(z) = \frac{\nu(z)}{z} \in V \oplus W$. On a donc une décomposition unique $\rho(z) = v(z) + w(z)$ avec $v \in V$ et $w \in W$. D'après III.A.3 on a $z \frac{\nu(z^2)}{z^2} = \mu(\rho)(z) = \mu(v)(z) + \mu(w)(z)$ avec $\mu(v) \in V$ et $\mu(w) \in W$. Donc

$$W \ni S'_{m-1}(z) = \underbrace{(2^{m+1}\mu(v) - v)(z)}_{\in V} + \underbrace{(2^{m+1}\mu(w) - w)(z)}_{\in W} \quad (11)$$

et $2^{m+1}\mu(v) - v = 0$. Puisque $w \in W$, il existe $u \in V + W$ tel que $w = u'$, d'après III.A.2, et $S'_{m-1}(z) = (2^{m+1}\mu(u') - u')(z) = 2^{m+1}z u'(z^2) - u'(z)$. On en tire $S_{m-1}(z) = 2^m u(z^2) - u(z) + c$ avec $c \in \mathbb{C}$, ce qui se réécrit en posant $t(z) = u(z) + \frac{c}{2^m - 1} \in \mathbb{C}_0(z)$

$$S_{m-1}(z) = 2^m t(z^2) - t(z).$$

En remontant ainsi, on aboutit à

$$z \frac{R'(z)}{R(z)} = S_0(z) = 2G(z^2) - G(z) \quad (12)$$

avec $G \in \mathbb{C}_0(z)$. Si 0 était pôle d'ordre $d > 0$ de G , il serait pôle d'ordre $2d$ de $G(z^2)$ donc aussi de $S_0(z)$, ce qui n'est pas. Donc 0 n'est pas pôle de G . On a $G(0) = 0$.

V.3 a. On remarque que $\frac{R'(z)}{R(z)}$ (la dérivée logarithmique de R) n'a que des pôles simples aux zéros et aux pôles de R . Précisément on a

$$\frac{R'(z)}{R(z)} = \sum_{\gamma \in \mathbb{C}^*} \frac{r(\gamma)}{z - \gamma}, \quad (13)$$

où $r(\gamma) \in \mathbb{Z}$ est l'ordre du zéro γ si γ est un zéro de R , l'opposé de l'ordre du pôle γ si γ est un pôle de R et 0 dans les autres cas.

Si a^2 (avec $a \neq 0$) est pôle d'ordre $n > 1$ de $G(z)$, alors $\pm a$ sont pôles d'ordre n de $G(z^2)$ et donc aussi pôles d'ordre n de $G(z)$ (sinon, ils seraient pôles d'ordre $\geq n$ de $z \frac{R'(z)}{R(z)}$). En continuant, on aurait ainsi une infinité de pôles pour G , ce qui est beaucoup trop pour une fraction rationnelle. Ainsi G n'a que des pôles simples, et sa décomposition en éléments simples est

$$G(z) = \sum_{\gamma \in \mathbb{C}^*} \frac{g(\gamma)}{z - \gamma}, \quad (14)$$

sans partie entière puisque $G \in \mathbb{C}_0(z)$ et $G(0) = 0$.

b. De (13) on tire

$$z \frac{R'(z)}{R(z)} = \sum_{\gamma \in \mathbb{C}^*} r(\gamma) + \sum_{\gamma \in \mathbb{C}^*} \gamma \frac{r(\gamma)}{z - \gamma}. \quad (15)$$

De (14) et de $\frac{1}{z^2 - \gamma^2} = \frac{1}{2\gamma} \left(\frac{1}{z - \gamma} - \frac{1}{z + \gamma} \right)$ on tire

$$2G(z^2) - G(z) = \sum_{\gamma \in \mathbb{C}^*} \frac{g(\gamma^2)/\gamma - g(\gamma)}{z - \gamma} \quad (16)$$

En rapprochant (15) et (16), il vient $\frac{g(\gamma^2)}{\gamma^2} - \frac{g(\gamma)}{\gamma} = r(\gamma) \in \mathbb{Z}$ pour tout $\gamma \in \mathbb{C}^*$. Comme il n'y a qu'un nombre fini de γ tels que $g(\gamma) \neq 0$, on en déduit que $g(\gamma)/\gamma \in \mathbb{Z}$ pour tout $\gamma \in \mathbb{C}^*$; en effet, on aurait sinon un γ tel que $g(\gamma^2)/\gamma^2 \in \mathbb{Z}$ et $g(\gamma)/\gamma \notin \mathbb{Z}$, ce qui est impossible puisque leur différence est entière.

Posons maintenant $S(z) = \prod_{\gamma \in \mathbb{C}^*, g(\gamma) \neq 0} (z - \gamma)^{-g(\gamma)/\gamma}$. Alors

$$z \frac{S'(z)}{S(z)} = z \sum_{\gamma \in \mathbb{C}^*} \frac{-g(\gamma)/\gamma}{z - \gamma} = - \sum_{\gamma \in \mathbb{C}^*} \frac{g(\gamma)}{\gamma} - \sum_{\gamma \in \mathbb{C}^*} \frac{g(\gamma)}{z - \gamma} = c - G(z), \quad (17)$$

où l'on a posé $c = - \sum_{\gamma \in \mathbb{C}^*} \frac{g(\gamma)}{\gamma}$. Mais puisque $G(0) = 0$, on trouve $c = 0$. En reportant dans (12) et en divisant par z , on obtient l'égalité dans $\mathbb{C}(z)$

$$\frac{R'(z)}{R(z)} = \frac{S'(z)}{S(z)} - \frac{2z S'(z^2)}{S(z^2)}$$

d'où, en reconnaissant les dérivées logarithmiques, $R(z) = \lambda \frac{S(z)}{S(z^2)}$ avec $\lambda \in \mathbb{C}^*$. En faisant $z = 0$ on obtient $\lambda = 1$.

On a donc trouvé une fraction rationnelle $S(z)$ qui vérifie $S(z) = R(z) S(z^2)$ dans $\mathbb{C}(z)$ et telle que 0 n'est ni pôle ni zéro de S . Le raisonnement de 1 montre que $S(z) = S(0) \theta(z)$ au voisinage de l'origine, et donc par prolongement analytique $\theta(z) \in \mathbb{C}(z)$.