Théorème tauberien et nombres premiers

Le théorème tauberien de Karamata donne un équivalent entre comportement en 0^+ de la transformée de Laplace $\varphi(a)$ d'une mesure positive μ sur $\mathbb{R}_+$, et mesure des grands intervalles $\mu([0,1/a])$, lorsque a tend vers 0. Voir ce document. Le théorème tauberien d'Ikehara permet entre autre de donner un équivalent de $\mu([1/a, 1/a+h])$ pour tout h fixé, lorsque a tend vers 0, précisant le théorème de Karamata. Il demande cependant d'avoir une information quantitative sur le comportement de la transformée de Laplace φ de μ dans le plan complexe. On déduit de l'énoncé d'Ikehara une démonstration simple et auto-contenue du théorème des nombres premiers dans la Section 2.

1 – Le théorème d'Ikehara

Théorème 1. *Soit $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ une fonction croissante. S'il existe deux constantes $c, \ell \geqslant 0$ telles que l'intégrale*

$$F(z) := \int_0^\infty e^{-zx} f(x)dx$$

converge sur le demi plan ouvert $\big\{\mathrm{Re}(z) > c\big\}$ et que la fonction

$$G(z) := F(z) - \frac{\ell}{z-c}$$

admet une extension continue au demi plan fermé $\big\{\mathrm{Re}(z) \geqslant c\big\}$, alors

$$e^{-cx} f(x) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} \ell.$$

On déduit effectivement de cet énoncé un équivalent de $\mu([1/a, 1/a+h])$, pour h fixé, lorsque a tend vers 0. On regarde ici la transformée de Laplace (complexe) de la mesure $\mu(dx) = f(x)dx$. Notons que

$$G(z) = \int_0^\infty \big(e^{-cx} f(x) - \ell\big) e^{-(z-c)x} dx =: \int_0^\infty \phi(x) e^{-(z-c)x} dx.$$

On souhaite montrer que ϕ tend vers 0 en $+\infty$. On va voir que ϕ est essentiellement une transformée de Fourier, si bien que la conclusion viendra du lemme de Riemann-Lebesgue. La chose est toute bête. Pour tout $\varepsilon > 0$, on a effectivement que

$$G(c+\varepsilon+it) = \int_0^\infty e^{-\varepsilon x} \phi(x) e^{-itx} dx$$

est la “transformée de Fourier” de $e^{-\varepsilon x}\phi(x)$, si l'on oublie qu'on intègre ici sur $(0, +\infty)$ plutôt que sur $\mathbb{R}$ tout entier. En prenant la transformée de Fourier inverse en t on aurait

$$\int e^{iyt} G(c+\varepsilon+it)dt = \int\int_0^\infty e^{-\varepsilon x}\phi(x)e^{-itx} dxdt = \int_0^\infty e^{-\varepsilon x}\phi(x)e^{-itx}\delta_y(x)dx = e^{-\varepsilon y}\phi(y),$$

si l'on pouvait intervertir les deux intégrales, en nous servant de l'identité $\int e^{it(y-x)}dt = \delta_y(x)$. Si l'on pouvait envoyer ε vers 0 sans précaution on obtiendrait bien ϕ sous forme de transformée de Fourier

$$\phi(y) = \int e^{iyt} G(c+it)dt.$$

Reste à rendre quantitatif ce raisonnement qualitatif.

Démonstration – Donnons-nous une famille de fonctions ρ_n sur $\mathbb{R}$, à support compact, et telles que les $\widehat{\rho_n}$ forment une approximation de l'unité. On peut alors effectivement intervertir ci-dessous l'intégrale en t et l'intégrale en x définissant G et obtenir

$$\int e^{iyt}\rho_n(t)G(c+\varepsilon+it)dt = \int_0^\infty e^{-\varepsilon x}\phi(x)\widehat{\rho_n}(y-x)dx$$

Puisque G est continue sur le demi plan fermé $\{\mathrm{Re}(z) \geqslant c\}$ et que ρ_n est à support compact, la famille de fonctions $\big(\rho_n(\bullet)G(c+\varepsilon+i\bullet)\big)_{0<\varepsilon\leqslant 1}$ converge uniformément vers la fonction $\rho_n(\bullet)G(c+i\bullet)$ et

$$\int e^{iyt}\rho_n(t)G(c+\varepsilon+it)dt \underset{\varepsilon\to 0}{\longrightarrow} \int e^{iyt}\rho_n(t)G(c+it)dt.$$

On a donc, d'après le théorème de convergence monotone,

$$\int e^{iyt}\rho_n(t)G(c+it)dt = \int_0^\infty \phi(x)\widehat{\rho_n}(y-x)dx,$$

et puisque la fonction $\rho_n(\bullet)G(c+i\bullet)$ est intégrable (car continue et à support compact), on a

$$(\star) := \int_0^\infty \phi(x)\widehat{\rho_n}(y-x)dx \underset{y\to+\infty}{\longrightarrow} 0,$$

d'après le lemme de Riemann-Lebesgue. Rappelons que $\phi(x) = e^{-cx}f(x) - \ell$. On n'a jusque-là pas utilisé le fait que f est croissante. Donnons-nous maintenant $\delta > 0$ et notons que pour $y \geqslant 0$

$$(\star) = \int_{-\infty}^{y+\delta} \phi(y+\delta-z)\widehat{\rho_n}(z)dz \geqslant \int_{-\delta}^{\delta} \phi(y+\delta-z)\widehat{\rho_n}(z)dz \geqslant \int_{-\delta}^{\delta} \Big(e^{-c(y+2\delta)}f(y)-\ell\Big)\widehat{\rho_n}(z)dz,$$

du fait que f est croissante, avec $e^{-c(y+2\delta)}f(y) - \ell = e^{-2\delta c}\phi(y) + \big(e^{-2\delta c}\ell - \ell\big)$. Puisque la limite supérieure en y du terme de gauche est nulle il s'ensuit qu'on a pour tout n

$$0 \geqslant e^{-2\delta c}\limsup_{+\infty}\phi + \big(e^{-2\delta c}\ell - \ell\big)\int_{-\delta}^{\delta}\widehat{\rho_n}(z)dz.$$

On en conclut que $\limsup_{+\infty}\ \phi \leqslant 0$, en envoyant n vers ∞ puis δ vers 0. On tire au passage le fait que ϕ est majorée, disons par une constante m. Maintenant, on a

$$\begin{aligned}\int_0^\infty \phi(x)\widehat{\rho_n}(y-\delta-x)dx &= \int_{-\infty}^{y-\delta}\phi(y+\delta-z)\widehat{\rho_n}(z)dz \\ &\leqslant \int_{-\delta}^{\delta}\phi(y-\delta-z)\widehat{\rho_n}(z)dz + m\int_{-\infty}^{y-\delta}\mathbf{1}_{|z|>\delta}\widehat{\rho_n}(z)dz.\end{aligned} \tag{1.1}$$

La croissance de f donne cette fois $\phi(y-\delta-z) \leqslant e^{-c(y-2\delta)}f(y)-\ell$, lorsque $|z|\leqslant\delta$, et l'on conclut comme ci-dessus de l'inégalité (1.1) que $\liminf\ \phi \geqslant 0$, du fait que les $\widehat{\rho_n}$ forment une approximation de l'identité. $\triangleright$

2 – Le théorème des nombres premiers

La formule

$$\zeta(z) := \sum_{n\geqslant 1} n^{-z}$$

définit une fonction holomorphe sur le demi plan complexe ouvert $\{\mathrm{Re}(z) > 1\}$. Notons $\mathbb{P}\subset\mathbb{N}$ l'ensemble des nombres premiers. Développant $\big(1-p^{-z}\big)^{-1}$ en série et utilisant l'*unique factorisation* des nombres entiers en termes des nombres premiers, on voit que

$$\zeta(z) = \prod_{p\in\mathbb{P}}\big(1-p^{-z}\big)^{-1};$$

on peut bien intervertir $\prod_{p\in\mathbb{P}}$ et les sommes issues du développement de chaque facteur $\big(1-p^{-z}\big)^{-1}$ lorsque $\mathrm{Re}(z) > 1$. Ce développement en produit montre que la fonction ζ ne s'annule pas sur le demi plan ouvert $\{\mathrm{Re}(z) > 1\}$, comme $|p^{-z}| = p^{-\mathrm{Re}(z)} < 1$. Notons que puisque

$(z-1)^{-1} = \int_0^\infty x^{-z}dx$, la formule

$$g(z) := \zeta(z) - \frac{1}{z-1} = \sum_{n\geqslant 1} \int_n^{n+1} \bigl(n^{-z} - x^{-z}\bigr)dx$$

définit une fonction holomorphe g sur le demi plan ouvert $\bigl\{\mathrm{Re}(z) > 0\bigr\}$, puisque $\bigl|n^{-z} - x^{-z}\bigr| \leqslant \frac{|z|}{n^{\mathrm{Re}(z)+1}}$, sur l'intervalle $[n, n+1]$. Les fonctions ζ et ζ' sont en particulier bien définies et continues sur l'ouvert relatif $\bigl\{\mathrm{Re}(z) \geqslant 1\bigr\}\backslash\{1\}$ du fermé $\bigl\{\mathrm{Re}(z) \geqslant 1\bigr\}$.

Lemme 2. *Pour* $\mathrm{Re}(z) > 1$*, on a*

$$-\frac{\zeta'(z)}{\zeta(z)} = z \int_0^\infty e^{-zx} f(x) dx$$

pour une fonction $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ *croissante.*

Démonstration – On déduit du développement en produit que

$$-\frac{\zeta'(z)}{\zeta(z)} = \sum_{p\in\mathbb{P}} \frac{\ln(p)\, p^{-z}}{1 - p^{-z}} = \sum_{p\in\mathbb{P}} \left(\ln(p) \sum_{n\geqslant 1} p^{-nz}\right).$$

Dans le même temps, pour $p \in \mathbb{P}$ fixé,

$$\int_0^\infty e^{-zx} \left[\frac{x}{\ln(p)}\right] \ln(p) dx = \int_0^\infty e^{-zx} \ln(p) \left(\sum_{n\leqslant x/\ln(p)} 1\right) dx = \ln(p) \sum_{n\geqslant 1} \int_{n\ln(p)} e^{-zx}$$

$$= \frac{\ln(p)}{z} \sum_{n\geqslant 1} p^{-nz}.$$

on a donc le résultat de l'énoncé avec

$$f(x) := \sum_{p\in\mathbb{P}} \left[\frac{x}{\ln(p)}\right] \ln(p).$$

$\triangleright$

Lemme 3. *La fonction* ζ *ne s'annule pas sur* $\bigl\{\mathrm{Re}(z) = 1\bigr\}\backslash\{1\}$.

Démonstration – Pour un nombre complexe z de module 1 on a $\overline{z} = z^{-1}$, et donc l'identité

$$\left|\sum_{j=0}^{2} z^j\right|^2 = \sum_{j,j'=0}^{2} z^{j-j'} = \sum_{|k|<3} \bigl(3 - |k|\bigr) z^k.$$

Appliqué à $z = e^{-in\ln(p)t}$ et $s > 1$ cela nous donne

$$\prod_{|k|<3} \zeta(s + ikt)^{3-|k|} = \exp\left(\sum_{\substack{n\geqslant 1\\ p\in\mathbb{P}}} \frac{p^{-sn}}{n} \left|\sum_{j=0}^{2} e^{ijnt\ln(p)}\right|^2\right) \geqslant 1,$$

c'est-à-dire

$$\Bigl|\zeta(s)^3 \zeta(s + it)^4 \zeta(s + 2it)^2\Bigr| \geqslant 1.$$

Si l'on avait $\zeta(1+it) = 0$ pour un $t \neq 0$, le quotient $\bigl(\zeta(s+it) - \zeta(1+it)\bigr)/(s-1)$ aurait une limite finie, donnée par $g'(1+it) + 1/t^2$. Tenant compte du fait que ζ a un pôle d'ordre 1 en $z = 1$, on conclurait donc de l'inégalité précédente la contradiction

$$O(1) \geqslant (s-1)^{-1}.$$

$\triangleright$

À ce stade, on a obtenu que la fonction ζ'/ζ admet un prolongement continu au complémentaire de tout voisinage ouvert du singleton $\{1\}$ dans le demi plan fermé $\bigl\{\mathrm{Re}(z) \geqslant 1\bigr\}$. Un calcul direct sur $\{\mathrm{Re}(z) > 1\}$ nous donne

$$\frac{\zeta'(z)}{\zeta(z)} + \frac{1}{z-1} = \frac{(z-1)g'(z) + g(z)}{(z-1)g(z)+1}.$$

Le membre de droite étant holomorphe sur le demi plan ouvert $\{\mathrm{Re}(z) > 0\}$, la fonction $-(\zeta'/\zeta)(z) - (z-1)^{-1}$ a en particulier un prolongement continu au demi espace fermé $\{\mathrm{Re}(z) \geqslant 1\}$, si bien que

$$\int_0^\infty e^{-zx} f(x)dx - \frac{1}{z-1}$$

a aussi un prolongement continu à $\{\mathrm{Re}(z) \geqslant 1\}$, d'après le lemme 2. Le théorème d'Ikehara, Théorème 1, nous donne donc l'équivalent

$$f(x) \sim e^x, \quad i.e. \quad f(\ln x) \sim x, \tag{2.1}$$

lorsque x est grand. Maintenant, si

$$\pi(x) := \sum_{p\in\mathbb{P}, p\leqslant x} 1$$

désigne la fonction de comptage des nombres premiers,

$$f(\ln x) = \sum_{p\in\mathbb{P}} \left[\frac{\ln x}{\ln p}\right] \ln(p) \leqslant \pi(x)\ln(x) \tag{2.2}$$

et l'on a pour $1 < y < x$

$$\pi(x) - \pi(y) \leqslant \sum_{y<p<x} \frac{\ln p}{\ln y} \leqslant \frac{f(\ln x)}{\ln(y)},$$

si bien que

$$\pi(x) \leqslant y + \frac{f(\ln x)}{\ln y}.$$

Appliquant cette inégalité à $y = \frac{x}{\ln(x)^2}$, on obtient avec (2.2) l'encadrement

$$\frac{f(\ln x)}{x} \leqslant \frac{\pi(x)\ln(x)}{x} \leqslant \frac{f(\ln x)}{x}\frac{\ln(x)}{\ln(x/\ln(x)^2)} + \frac{1}{\ln x}.$$

L'équivalent (2.1) sur la fonction $f(\ln x)$ donne donc le résultat suivant, qui constitue le théorème des nombres premiers.

Théorème 4. *On a $\pi(x) \sim x/\ln(x)$, lorsque x est grand.*