Université de Rennes 1
Préparation à l'agrégation
de mathématiques
Auteur du document :

S. Cantat

LA DROITE PROJECTIVE COMPLEXE.

Pour cette liste d'exercices, les références principales sont le livre de géométrie pour l'agrégation de M. Audin (éditions Belin) et le livre de G. Jones et D. Singerman intitulé *Complex Functions* (éditions Cambridge University Press).

1. La sphère et la droite projective.

1.1. **La sphère S^2.** On note S^2 la sphère de dimension 2 définie comme l'ensemble des points (x_1, x_2, x_3) de $\mathbf{R}^3$ satisfaisant l'équation

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1. \tag{1}$$

On munit S^2 de la topologie induite par la topologie usuelle de $\mathbf{R}^3$. On note $N = (0, 0, 1)$ le pôle nord de S^2.

1.1.1. Montrer que S^2 est un compact.

1.1.2. On note $z = x + iy$ les éléments de la droite complexe $\mathbf{C}$; on identifie cette droite au plan horizontal $\{x_3 = 0\}$ par la bijection $z \mapsto (x, y, 0)$. Donner l'expression de la projection stéréographique de pôle nord $\Psi : \mathsf{S}^2 \setminus \{N\} \to \mathbf{C}$ dans les coordonnées qui viennent d'être introduites. Donner l'expression de son inverse. En déduire que Ψ est un homéomorphisme de $\mathsf{S}^2 \setminus \{N\}$ sur $\mathbf{C}$.

1.2. **La sphère de Riemann $\overline{\mathbf{C}}$.** Soit $\overline{\mathbf{C}} = \mathbf{C} \cup \{\infty\}$ le compactifié d'Alexandroff de $\mathbf{C}$. On rappelle qu'une partie U de $\overline{\mathbf{C}}$ est ouverte si U est un ouvert de $\mathbf{C}$ ou si U contient ∞ et son complémentaire est le vide ou un compact de $\mathbf{C}$.

1.2.1. Montrer que la projection stéréographique Ψ s'étend en un homéomorphisme de S^2 sur $\overline{\mathbf{C}}$ si l'on pose $\Psi(N) = \infty$.

1.2.2. Montrer que l'ensemble des droites et des cercles du plan coïncide avec l'ensemble des courbes possédant une équation du type

$$a(x^2 + y^2) + bx + cy + d = 0, \tag{2}$$

où les quatre nombres réels a, b, c et d ne sont pas tous nuls (dans cette question, on considèrera que l'ensemble vide et les singletons sont des cercles). Montrer que la projection stéréographique réalise une bijection de l'ensemble des cercles de S^2 vers l'ensemble des droites et des cercles de $\mathbf{C}$. On caractérisera les cercles dont les images sont des droites.

1.2.3. Quelle est l'image des ensembles suivants par Ψ^{-1} :

– Le cercle $C_r = \{z \in \mathbf{C} \,:\, |z| = r\}$,
– l'axe réel,
– l'axe imaginaire,
– les points du carré de sommet $\pm 1 \pm i$.

On se contentera d'un dessin.

1.2.4. Montrer que les points de coordonnées $(\pm\sqrt{1/3}, \pm\sqrt{1/3}, \pm\sqrt{1/3})$ sont les sommets d'un cube qui sont situés sur la sphère S^2. Quelle est l'image de ces points par Ψ ? Faire une figure. Pour chaque tétraèdre régulier dont les sommets font partie de ceux du cube, étudier l'image de ses sommets par Ψ.

1.3. **La droite projective $\mathsf{P}^1(\mathbf{C})$.** Soit $\mathsf{P}^1(\mathbf{C})$, ou plus brièvement P^1, la droite projective complexe. On note (z_1, z_2) les coordonnées standards de $\mathbf{C}^2$ et $[z_1 : z_2]$ les coordonnées homogènes de P^1 qui s'en déduisent. La droite projective est munie de sa topologie usuelle d'espace quotient.

1.3.1. Montrer que l'application $\tau : \mathbf{C} \to \mathsf{P}^1$, définie par $\tau(z) = [z : 1]$ s'étend en un homéomorphisme de $\overline{\mathbf{C}}$ sur P^1 si l'on pose $\tau(\infty) = [1 : 0]$. En déduire que P^1 est homéomorphe à S^2 et expliciter un tel homéomorphisme.

1.3.2. En déduire que $\mathrm{PGL}(2, \mathbf{C})$ se plonge dans le groupe des homéomorphismes de la sphère de Riemann (on conjuguera l'action de $\mathrm{PGL}(2, \mathbf{C})$ sur P^1 par l'homéomorphisme τ). Les homéomorphismes ainsi obtenus sont appelés ¡¡ homographies ¿¿. Exprimer ces transformations en fonction de la coordonnée z de $\overline{\mathbf{C}}$.

2. Homographies cercles et birapport

On note $\mathcal{H}$ le groupe des homographies. Grace au paragraphe précédent, $\mathcal{H}$ est isomorphe à $\mathrm{PGL}(2, \mathbf{C})$ et peut être considéré comme un sous-groupe des homéomorphismes de $\overline{\mathbf{C}}$, S^2 ou P^1.

2.1. **Le birapport et le groupe Σ_4.** On note Σ_4 le groupe des permutations de l'ensemble à quatre éléments $\{1, 2, 3, 4\}$.

2.1.1. Montrer que $\mathcal{H}$ agit simplement transitivement sur les triplets de points distincts de P^1.

2.1.2. En utilisant 2.1.1, montrer que, si w, x, y, et z sont quatre points distincts de P^1, il existe un unique élément h de $\mathcal{H}$ et un unique élément w' de P^1 tels que :

$$\left\{ \begin{array}{rcl} h(w) & = & w' \\ h(x) & = & [0:1] \\ h(y) & = & [1:1] \\ h(z) & = & [1:0] \end{array} \right. \tag{3}$$

Si $w' = [\lambda : 1]$ en coordonnées homogènes, on définit alors le birapport du quadruplet (w, x, y, z) par

$$\mathbf{bir}(w; x; y; z) = \lambda. \tag{4}$$

2.1.3. Montrer que quatre points distincts de P^1 se correpondent par une homographie si et seulement s'ils ont même birapport. Étendre la définition du birapport à tout quadruplet de points distincts mais alignés d'un espace projectif.

2.1.4. Si (x_0, x_1, x_2, x_3) sont quatre points distincts de $\overline{\mathbf{C}}$, montrer que

$$\mathbf{bir}(x_0; x_1; x_2; x_3) = \frac{(x_0 - x_1)(x_2 - x_3)}{(x_1 - x_2)(x_3 - x_0)}. \tag{5}$$

2.1.5. En effectuant un prolongement par continuité, étendre la définition du birapport à l'ensemble des quadruplets de points dont les trois derniers sont distincts.

2.1.6. On fait agir Σ_4 par permutation sur l'ensemble des quadruplets de points distincts de P^1 : si (m_1, m_2, m_3, m_4) est un tel quaruplet et σ est un élément de Σ_4, l'image de (m_1, m_2, m_3, m_4) par σ est le quadruplet $(m_{\sigma(1)}, ..., m_{\sigma(4)})$.

Montrer que $\mathbf{bir}(m_{\sigma(1)}; ...; m_{\sigma(4)})$ est une fonction homographique de $\mathbf{bir}(m_1; m_2; m_3; m_4)$. Pour cela, on pourra expliciter cette fonction lorsque σ est une transposition.

2.1.7. On désigne par $\Theta : \Sigma_4 \to \mathcal{H}$ le morphisme ainsi défini. Vérifier que l'image de ce morphisme est constituée des six homographies envoyant respectivement le birapport λ sur :

$$\lambda,\ \frac{1}{\lambda},\ 1-\lambda,\ \frac{1}{1-\lambda},\ \frac{\lambda}{1-\lambda},\ \frac{\lambda-1}{\lambda}.$$

Si $\lambda = -1$, quelle est son orbite sous l'action de ces six homographies. Lorsque quatre points a, b, c et d vérifient $\mathbf{bir}(a; b; c; d) = -1$, on dit que ces quatre points forment une division harmonique. La définition varie suivant les livres : elle dépend de l'ordre dans lequel on considère les quatre points.

2.1.8. Calculer le noyau de Θ. Montrer que A_4, le groupe alterné sur 4 éléments, n'est pas un groupe simple.

2.2. **Générateurs et action sur les cercles.**

2.2.1. Montrer que $\mathcal{H}$ est engendré par les transformations suivantes :

- les translations $t_a(z) = z + a$, où $a \in \mathbf{C}$,
- les homothéties $h_\lambda(z) = \lambda z$, où $\lambda \in \mathbf{C}^*$,
- la transformation $J(z) = 1/z$.

On remarquera que les deux premières familles d'homographies forment des sous-groupes de $\mathcal{H}$. Quel est le groupe engendré par ces deux sous-groupes ? Pour chacune de ces transformations, donner une matrice $A \in \mathrm{GL}(2, \mathbf{C})$ qui la représente.

2.2.2. Montrer que le groupe $\mathcal{H}$ envoie cercles de S^2 sur cercles de S^2. Montrer que $\mathcal{H}$ agit transitivement sur les cercles de S^2. Soient z_1, z_2, et z_3 trois points distincts situés sur un même cercle C du plan. Déduire de ce qui précède que $C = \{z \in \mathbf{C} : \mathbf{bir}(z; z_1; z_2; z_3) \in \mathbf{R}\}$.

2.2.3. Montrer que le stabilisateur du demi-plan $\mathsf{H} = \{z \in \overline{\mathbf{C}} : \mathrm{Im}(z) > 0\}$ sous l'action de $\mathcal{H}$ coïncide avec le groupe $\mathrm{PSL}(2, \mathbf{R})$. On montrera au passage que

(ii) Si z a une partie imaginaire strictement positive et $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ est un élément de $\mathrm{PGL}(2, \mathbf{R})$ alors

$$\mathrm{Im}\left(\frac{az+b}{cz+d}\right) = \frac{(ad-bc)\mathrm{Im}(z)}{|cz+d|^2}$$

(ii) $\mathrm{PSL}(2, \mathbf{R})$ coïncide avec le sous-groupe de $\mathrm{PGL}(2, \mathbf{R})$ dont les éléments sont représentés par des matrices à déterminant positif.

2.2.4. Soient C_1 et C_2 deux cercles disjoints du plan. Montrer qu'il existe une homographie envoyant C_1 et C_2 sur deux cercles concentriques. Pour cela, on pourra considérer le rayon $\mathcal{D}$ de C_1 passant par le centre de C_2 et noter a le centre de C_2, et b et c les deux points d'intersections de $\mathcal{D}$ avec C_1 ; l'homographie h qui envoie a sur i, b sur 0 et c sur ∞ envoie alors

(i) le rayon $\mathcal{D}$ sur la droite verticale passant par i (i.e. $\{x = 0\}$) ;

(ii) le cercle C_1 sur la droite horizontale (utiliser (i) et la propriété qui sera démontrée à la question 3.1.1) ;

(iii) Les cercles ne contenant pas c et dont le centre est sur $\mathcal{D}$ sur des cercles dont le centre appartient à la droite verticale $\{x = 0\}$ (et réciproquement). Pour cela, on pourra considérer les symétries planes $\sigma_{\mathcal{D}}$ et σ_0 autour des droites $\mathcal{D}$ et $\{x = 0\}$ et montrer que $h \circ \sigma_{\mathcal{D}} = \sigma_0 \circ h$.

Conclure en considérant l'action des homothéties de rapport réels centrées à l'origine. Est-ce-que les homographies agissent transitivement sur les couples de cercles disjoints ?

2.2.5. En déduire une démonstration du petit théorème de Poncelet.

3. Transformations conformes et automorphismes

3.1. **Transformations conformes.** Soient U et V deux ouverts de $\mathbf{C}$ et $f : U \to V$ une application de classe $\mathcal{C}^1$. On dit que f préserve les angles orientés, ou encore que f est conforme, si la différentielle de f en tout point est une similitude directe.

3.1.1. Montrer que les applications conformes sont holomorphes. Que dire de la réciproque ? Montrer que les homographies sont conformes (en dehors de leur pôle).

3.1.2. Donner une démonstration du théorème de Weierstrass suivant lequel, si f est une fonction holomorphe possédant une singularité essentielle au point a, l'image par f de tout voisinage de a est dense dans $\mathbf{C}$. On pourra utiliser le développement en série de Laurent de f sur un disque centré en a et privé de a.

Soit $g : \mathbf{C} \to \mathbf{C}$ une fonction holomorphe, montrer que $g(1/z)$ a une singularité essentielle à l'origine ou que g est un polynôme.

En déduire que le groupe des bijections biholomorphes de $\mathbf{C}$ est le groupe affine.

3.1.3. Donner une démonstration du lemme de Schwarz concernant les applications holomorphes du disque unité dans le disque unité. En déduire que le groupe des bijections biholomorphes de H est isomorphe à PSL$(2, \mathbf{R})$.

3.1.4. (nécessite quelques rudiments sur les sous-variétés de $\mathbf{R}^3$). On munit la sphère S^2 de son orientation usuelle. Montrer que la projection stéréographique préserve les angles orientés. Montrer que le groupe des transformations conformes de S^2 coïncide avec $\mathcal{H}$.

3.2. **Le groupe circulaire.** Soit f une bijection de S^2 qui envoie cercle sur cercle.

3.2.1. Montrer qu'il existe une homographie h telle que $h \circ f$ fixe les points $N = (0, 0, 1)$, $S = (0, 0, -1)$ et $I = (1, 0, 0)$. Montrer ensuite que $\phi = \Psi \circ h \circ f \circ \Psi^{-1}$ est une bijection de $\mathbf{C}$ qui fixe l'origine, envoie droite sur droite et cercle sur cercle.

3.2.2. Montrer que tout automorphisme de corps $s : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ est égal à l'application identité. En déduire que tout automorphisme du corps $\mathbf{C}$ qui fixe l'axe réel est l'identié ou la conjugaison complexe.

3.2.3. Montrer que ϕ préserve les divisions harmoniques (on dit que quatre points sont en division harmonique quand leur birapport est égal à -1). Pour cela, on déterminera une construction géométrique permettant de trouver le point d tel que $\mathbf{bir}(a; b; c; d) = -1$ lorsque a, b et c sont donnés.

3.2.4. Montrer qu'une bijection de $\mathbf{C}$ qui fixe 0 et 1 et préserve les divisions harmoniques est un automorphisme de corps.

3.2.5. Montrer que f est une homographie ou que $f(\overline{z})$ en est une. En déduire quel est le groupe des bijections de la sphère qui envoient cercles sur cercles.

3.3. **Les groupes SO$(3, \mathbf{R})$ et PSU$(2, \mathbf{C})$.** Nous allons maintenant montrer que le groupe des rotations de $\mathbf{R}^3$ se plonge dans $\mathcal{H}$ et identifier son image avec PSU$(2, \mathbf{C})$.

3.3.1. Montrer que toute rotation de S^2 est induite par une homographie du type

$$z \mapsto \frac{az + b}{-\overline{b}z + \overline{a}}, \tag{6}$$

avec $a\overline{a} + b\overline{b} = 1$. Pour cela, on pourra utiliser le paragraphe 3.2 et la propriété suivante : une rotation envoie points antipodaux sur points antipodaux.

3.3.2. En déduire que SO$(3, \mathbf{R})$ et PSU$(2, \mathbf{C})$ sont isomorphes.