Agrégation de mathématiques

Questions sur les sous-espaces stables

facteurs sont, disons :

$$X^2,\ X^2,\ (X-1)^3,\ (X-1)^2,\ (X-1),\ (X-2)^3.$$

Aucune des sources que j'ai consultées ne donne la réponse, hormis Bourbaki (Algèbre, ch. VII, p.24) ; comme ce n'est malheureusement pas la lecture préférée des agrégatifs, voici la réponse. On écrit sur une même ligne les polynômes qui sont puissance du même facteur, en commençant par ceux d'exposant le plus élevé ; chaque ligne ainsi formée est complétée (si nécessaire) par des 1*, de façon à avoir des lignes de même longueur :*

$$\begin{array}{ccc} (X-1)^3 & (X-1)^2 & (X-1) \\ X^2 & X^2 & 1 \\ (X-2)^3 & 1 & 1 \end{array}$$

Les invariants de similitude sont alors les produits des éléments d'une même colonne, en commençant par la droite :

$$(X-1), \quad X^2(X-1)^2, \quad X^2(X-1)^3(X-2)^3.$$

Annexe

Proposition *Soit u un endomorphisme d'un K-espace vectoriel E de dimension finie. Si E est cyclique (pour u), l'ensemble des sous-espaces u-stables est fini. Réciproquement, si cet ensemble est fini, et si le corps K est infini, alors E est cyclique.*

Cet énoncé est donné par Cognet (Algèbre linéaire, p.371), mais sa démonstration est rocambolesque. En voici une plus courte.

Soient $m(T)$ le polynôme minimal de u, et A l'anneau $K[T]/(m)$. À tout $x \in E$, est associé une application K-linéaire

$$\alpha_x : A \longrightarrow E, \qquad p(T) \longmapsto p(u).x.$$

Le sous-espace $\mathrm{Im}(\alpha_x)$ est u-stable, et c'est le plus petit contenant x. Dire que E est cyclique signifie qu'il existe un x pour lequel α_x est un isomorphisme. Notons qu'alors les sous-espaces u-stables de E correspondent via α_x aux sous-espaces de A stables sous le produit par un quelconque polynôme, c'est-à-dire aux *idéaux de l'anneau* A. Comme A est le quotient de $K[T]$ par l'idéal engendré par m, les idéaux de A correspondent bijectivement à ceux de $K[T]$ qui contiennent m, c'est-à-dire finalement aux *diviseurs unitaires* de m, puisque $K[T]$ est principal. Ils sont en nombre fini.

Réciproquement, supposons que l'ensemble des sous-espaces u-stables de E soit fini, et soient $F_1, \ldots, F_s$ ceux qui sont *distincts de* E. Comme K est infini (il suffirait que K contienne plus de s éléments, voir Gourdon p. 110), la réunion de ces sous-espaces est distincte de E. Considérons alors un élément x de E qui ne soit dans aucun de ces F_i. Le sous-espace $\mathrm{Im}(\alpha_x) = Ax$ est stable et n'est contenu dans aucun des F_i. C'est donc E.