Agrégation de mathématiques

Questions sur les sous-espaces stables

Si ce n'est pas précisé, la question porte sur un K-espace vectoriel V muni d'un endomorphisme u.

1. - Qu'est-ce qu'un sous-espace stable de dimension 1 ?

2. - Si u est annulé par un polynôme de degré 2, alors pour tout sous-espace W, $W + u(W)$ est un sous-espace stable. Généraliser.

3. - Existe-t-il toujours dans V un sous-espace *non*-stable ?

4. - Soit V un espace vectoriel sur le corps $\mathbf{C}$ des nombres complexes. On désigne par u l'endomorphisme $x \mapsto ix$. On considère V comme un espace vectoriel sur $\mathbf{R}$. Quels sont les sous-$\mathbf{R}$-espaces stables sous u ?

5. - Caractériser les sous-espaces stables minimaux non nuls.

6. - a) On munit l'espace produit $V \times V$ de l'endomorphisme produit $u \times u$: $(x, y) \mapsto (u(x), u(y))$. Trouver des sous-espaces stables de $V \times V$ qui ne soient pas de la forme $W' \times W''$ avec W' et W'' des sous-espaces stables de V.
b) On note $f : V \times V \longrightarrow V$ l'application linéaire définie par $f(x, y) = x + y$. Montrer que si $W \subset V \times V$ est un sous-espace stable pour $u \times u$, alors $f(W) \subset V$ est un sous-espace stable pour u.
c) On considère un second espace vectoriel V', muni d'un endomorphisme u'. On suppose que les polynômes minimaux de u et de u' sont premiers entre eux. Montrer qu'un sous-espace stable de $V \times V'$ (muni de $u \times u'$) est un produit de sous-espaces stables $W \times W'$ (*On pourra appliquer le lemme des noyaux à un tel sous-espace*).

7. - Caractériser les sous-espaces stables sous un projecteur ($u^2 = u$).

8. - On suppose que $u^2 = 0$ et que $\dim(V) = 3$. Montrer que les sous-espaces stables de dimension 2 sont exactement ceux qui contiennent $u(V)$.

9. - Si u est diagonalisable à valeurs propres distinctes, montrer que tout sous-espace stable est cyclique. Donner un exemple de sous-espace stable sous un endomorphisme diagonalisable, et qui n'est pas cyclique .

10. - On suppose que, relativement à une base convenable de V, la matrice de u est un « bloc de Jordan » $U_{n,\lambda}$. Quels sont les sous-espaces stables ?

11. - On suppose que V est connu comme une somme directe (finie) $V = \oplus V_i$ où V_i est un sous-espace cyclique de polynôme minimal $(X - \lambda_i)^{m_i}$. Quels sont les invariants de similitude de u, ou, ce qui revient au même, quelle est la décomposition de Frobenius de V. Le jury poserait sans doute cette question sous une forme plus explicite, en précisant que les polynômes minimaux des facteurs sont, disons :

$$X^2,\ X^2,\ (X-1)^3,\ (X-1)^2,\ (X-1),\ (X-2)^3.$$

Aucune des sources que j'ai consultées ne donne la réponse, hormis Bourbaki (Algèbre, ch. VII, p.24) ; comme ce n'est malheureusement pas la lecture préférée des agrégatifs, voici la réponse. On écrit sur une même ligne les polynômes qui sont puissance du même facteur, en commençant par ceux d'exposant le plus élevé ; chaque ligne ainsi formée est complétée (si nécessaire) par des 1*, de façon à avoir des lignes de même longueur :*

$$\begin{array}{ccc} (X-1)^3 & (X-1)^2 & (X-1) \\ X^2 & X^2 & 1 \\ (X-2)^3 & 1 & 1 \end{array}$$

Les invariants de similitude sont alors les produits des éléments d'une même colonne, en commençant par la droite :

$$(X-1), \quad X^2(X-1)^2, \quad X^2(X-1)^3(X-2)^3.$$

Annexe

Proposition *Soit u un endomorphisme d'un K-espace vectoriel E de dimension finie. Si E est cyclique (pour u), l'ensemble des sous-espaces u-stables est fini. Réciproquement, si cet ensemble est fini, et si le corps K est infini, alors E est cyclique.*

Cet énoncé est donné par Cognet (Algèbre linéaire, p.371), mais sa démonstration est rocambolesque. En voici une plus courte.

Soient $m(T)$ le polynôme minimal de u, et A l'anneau $K[T]/(m)$. À tout $x \in E$, est associé une application K-linéaire

$$\alpha_x : A \longrightarrow E, \qquad p(T) \longmapsto p(u).x.$$

Le sous-espace $\mathrm{Im}(\alpha_x)$ est u-stable, et c'est le plus petit contenant x. Dire que E est cyclique signifie qu'il existe un x pour lequel α_x est un isomorphisme. Notons qu'alors les sous-espaces u-stables de E correspondent via α_x aux sous-espaces de A stables sous le produit par un quelconque polynôme, c'est-à-dire aux *idéaux de l'anneau A*. Comme A est le quotient de $K[T]$ par l'idéal engendré par m, les idéaux de A correspondent bijectivement à ceux de $K[T]$ qui contiennent m, c'est-à-dire finalement aux *diviseurs unitaires* de m, puisque $K[T]$ est principal. Ils sont en nombre fini.

Réciproquement, supposons que l'ensemble des sous-espaces u-stables de E soit fini, et soient $F_1, \dots, F_s$ ceux qui sont *distincts de* E. Comme K est infini (il suffirait que K contienne plus de s éléments, voir Gourdon p. 110), la réunion de ces sous-espaces est distincte de E. Considérons alors un élément x de E qui ne soit dans aucun de ces F_i. Le sous-espace $\mathrm{Im}(\alpha_x) = Ax$ est stable et n'est contenu dans aucun des F_i. C'est donc E.