Université de Rennes 1
Préparation à l'agrégation
de mathématiques
Auteur du document :

M. Coste

Racines de la dérivée d'un polynôme du troisième degré

C'est un développement qui peut se placer dans différentes leçons (sur les coniques, sur les racines d'un polynôme, sur les applications des complexes à la géométrie ou encore sur les applications des angles). Le résultat donne un supplément par rapport au théorème de Gauss-Lucas (les racines de la dérivée d'un polynôme non constant P sont contenues dans l'enveloppe convexe des racines de P), dans le cas d'un polynôme de degré 3 :

Theorème 1 *Soient M_1, M_2 et M_3 trois points non alignés dans le plan de la variable complexe, d'affixes respectivement z_1, z_2 et z_3. Soit*

$$P(X) = (X - z_1)(X - z_2)(X - z_3) .$$

Alors les racines du polynôme dérivé P' sont les foyers d'une ellipse tangente aux trois cotés du triangle $M_1M_2M_3$ en leurs milieux.

Ce résultat se trouve, avec la démonstration qui est donnée dans la deuxième section (à partir du deuxième petit théorème de Poncelet), dans Marden : Geometry of polynomials. Une autre démonstration est donnée dans le livre d'exercices Tissier : Mathématiques Générales, p. 224-227.

1 Le deuxième petit théorème de Poncelet

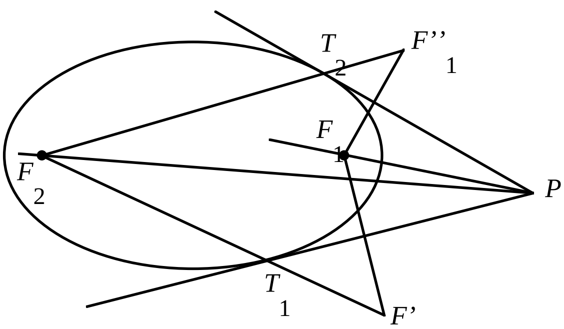
Ce n'est certainement pas un résultat fondamental sur les coniques. On peut le voir dans Lebossé-Hemery p. 283, dans Deltheil-Caire p. 245, dans Berger : Géométrie (17.6.3.6). Voici l'énoncé :

Theorème 2 *Soit E une ellipse de foyers F_1 et F_2. Soit P un point extérieur à E et soient PT_1 et PT_2 les deux tangentes menées de P à E, où T_1 et T_2 sont les points de tangence. Alors les angles de droites (PT_1, PF_1) et $(PF2, PT2)$ sont égaux.*

La démonstration utilise la propriété tangentielle fondamentale des ellipses : la tangente PT_1 est la bissectrice extérieure de l'angle $(\overrightarrow{T_1F_1}, \overrightarrow{T_2F_2})$. Autrement dit, si F_1' le symétrique orthogonal de F_1 par rapport à la tangente PT_1, alors les points F_2, T_1 et F_1' sont alignés et on a

$$d(F_2, F_1') = d(F_2, T_1) + d(T_1, F_1') = d(F_2, T_1) + d(T_1, F_1) = 2a ,$$

où a est le demi grand-axe de l'ellipse. De même, si F_1'' est le symétrique orthogonal de F_1 par rapport à PT_2, alors F_2, T_2 et F_1'' sont alignés et $d(F_2, F_1'') = 2a$.



Notons R_D la symétrie orthogonale par rapport à une droite D. Rappelons que si D et D' se coupent en O, $R_{D'} \circ R_D$ est la rotation de centre O et d'angle (mesuré modulo 2π) deux fois l'angle de droites (D, D') (mesuré modulo π). Donc, pour montrer le deuxième petit théorème de Poncelet, il suffit de vérifier que $R_{PF_1} \circ R_{PT_1}$ et $R_{PT_2} \circ R_{PF_2}$ sont la même rotation de centre P. Pour cela, on détermine l'image de F_1' par ces deux transformations.

On a clairement $R_{PT_1}(F_1') = F_1$ et $R_{PF_1}(R_{PT_1}(F_1')) = F_1$. On a vu plus haut que $d(F_2, F_1') = d(F_2, F_1'') = 2a$, et par ailleurs on a $d(P, F_1') = d(P, F_1) = d(P, F_1'')$. Donc PF_2 est la médiatrice de $F_1'F_1''$ et $R_{PF_2}(F_1') = F_1''$. On obtient aussi $R_{PT_2}(R_{PF_2}(F_1') = F_1$, ce qui montre que les rotations $R_{PF_1} \circ R_{PT_1}$ et $R_{PT_2} \circ R_{PF_2}$ coïncident et achève la démonstration du théorème.

2 Les racines de la dérivée

Nous passons maintenant à la démonstration du théorème 1. Soient w_1 et w_2 les racines de P', et soient F_1 et F_2 les points d'affixes w_1 et w_2. Le théorème de Gauss-Lucas nous dit que F_1 et F_2 sont à l'intérieur du triangle $M_1M_2M_3$.

Montrons l'égalité d'angles de droites $(M_1M_2, M_1F_1) = (M_1F_2, M_1M_3)$. On remarque que $P'(X)$ s'écrit de deux manières différentes :

$$\begin{aligned} P'(X) &= 3\,(X - w_1)(X - w_2) \\ &= (X - z_1)(X - z_2) + (X - z_2)(X - z_3) + (X - z_3)(X - z_1)\,. \end{aligned}$$

En faisant $X = z_1$, on obtient $3\,(z_1 - w_1)(z_1 - w_2) = (z_1 - z_2)(z_1 - z_3)$, d'où

$$\frac{z_2 - z_1}{w_1 - z_1} = 3\,\frac{w_2 - z_1}{z_3 - z_1}\,.$$

En passant aux arguments, on obtient l'égalité d'angles recherchée.

Construisons maintenant l'ellipse E de foyers F_1 et F_2 qui est tangente au coté M_1M_2. Pour ceci, on prend le symétrique orthogonal de F_1 par rapport à M_1M_2, soit F_1'. La droite F_2F_1' coupe M_1M_2 en T_1. L'ellipse E est l'ensemble des points Q tels que $d(F_1, Q) + d(F_2, Q) = d(F_1, T_1) + d(F_2, T_1)$. Soit M_1T_2 la deuxième tangente à E de M_1, où T_2 est le point de tangence. D'après le deuxième petit théorème de Poncelet, on a $(M_1M_2, M_1F_1) = (M_1F_2, M_1T_2)$ et donc la tangente M_1T_2 coïncide avec le coté M_1M_3. En échangeant les rôles des sommets, on montre de même que E est tangente au coté M_2M_3.

Il reste à vérifier que les points de tangence de l'ellipse E sont bien les milieux des cotés. Montrons le pour le milieu I du segment $[M_1M_2]$, d'affixe $(z_1 + z_2)/2$. Il suffit de vérifier que M_1M_2 est la bissecrice extérieure de $(\overrightarrow{IF_1}, \overrightarrow{IF_2})$, et donc de montrer l'égalité d'angles $(\overrightarrow{IM_1}, \overrightarrow{IF_1}) = (\overrightarrow{IF_2}, \overrightarrow{IM_2})$. En faisant $X = (z_1 + z_2)/2$ dans les deux expressions de $P'(X)$, on obtient

$$3\left(\frac{z_1 + z_2}{2} - w_1\right)\left(\frac{z_1 + z_2}{2} - w_2\right) = \left(\frac{z_2 - z_1}{2}\right)\left(\frac{z_1 - z_2}{2}\right)\,,$$

d'où l'égalité suivante qui donne l'égalité des angles en passant aux arguments :

$$12\,\frac{w_1 - \frac{z_1 + z_2}{2}}{z_1 - z_2} = \frac{z_2 - z_1}{w_2 - \frac{z_1 + z_2}{2}}\,.$$