

On pourrait penser que le problème de l'élimination est résolu, puisqu'on sait décider si deux polynômes donnés ont ou non une racine commune. Mais visiblement, ce n'est pas ce qu'on cherche : on a en vue des polynômes avec des coefficients dépendant de paramètres (par exemple, des polynômes à plusieurs variables, où on privilégie une variable), et alors le calcul du pgcd ne peut en général pas être fait d'une manière uniforme pour tous les paramètres. La réponse au problème est alors fournie par le résultant $\text{res}(P, Q)$ de P et de Q , qui est un polynôme à coefficients entiers en les coefficients $(a_0, \dots, a_p, b_0, \dots, b_q)$, et qui s'annule si et seulement si P et Q ont une racine commune, ou si a_0 et b_0 sont simultanément nuls.

On peut faire une analogie avec la situation que l'on connaît pour les systèmes de n équations linéaires à n inconnues. Le moyen le plus commode de résoudre un tel système est le pivot de Gauss. Mais si l'on discute un système où les coefficients dépendent de paramètres, il est utile de faire intervenir le déterminant du système. Cette analogie n'est pas superficielle ; on pourrait approfondir les rapports entre l'algorithme d'Euclide de calcul du pgcd et le pivot de Gauss (voir l'exercice 3), et on verra que le résultant est effectivement défini comme un déterminant.

L'étude du discriminant se rattache naturellement à celle du résultant. Le problème ici est de trouver une condition nécessaire et suffisante sur les coefficients du polynôme P pour que celui-ci ait une racine multiple (dans un corps algébriquement clos \overline{K} contenant K). Ceci revient à demander que P et P' aient un facteur commun non constant. On pourrait définir le discriminant de P comme le résultant de P et P' , mais la tradition (pas toujours respectée dans les ouvrages) donne une autre définition. Au-delà de ces divergences de définition, le point à retenir est qu'un polynôme unitaire P a ses racines distinctes si et seulement si son discriminant est non nul, et que ce discriminant est un polynôme à coefficients entiers en les coefficients de P .

1 Résultant : définition et propriétés fondamentales

On a dit dans l'introduction que les techniques d'élimination étaient surtout intéressantes dans le cas où les coefficients des polynômes dépendent de paramètres. Ceci amène à considérer des polynômes $P = u_0X^p + \dots + u_p$ et $Q = v_0X^q + \dots + v_q$ à coefficients indéterminés, de degrés $p > 0$ et $q > 0$ respectivement. Notons $\underline{u} = (u_0, \dots, u_p)$ et $\underline{v} = (v_0, \dots, v_q)$. Les polynômes P et Q appartiennent à $\mathbb{Z}[\underline{u}, \underline{v}, X]$.

Soit A un anneau commutatif unitaire. On peut substituer à \underline{u} et \underline{v} des suites $\underline{a} = (a_0, \dots, a_p)$ et $\underline{b} = (b_0, \dots, b_q)$ d'éléments de A , et on obtient ainsi des polynômes $P_{\underline{a}}$ et $Q_{\underline{b}}$ de $A[X]$; on dit qu'on a spécialisé \underline{u} et \underline{v} en \underline{a} et \underline{b} .

Le résultant $\text{res}(P, Q)$ de P et Q est le déterminant de la matrice carrée de taille $p + q$:

$$\begin{pmatrix} u_0 & u_1 & \dots & \dots & \dots & u_p & 0 & \dots & 0 \\ 0 & u_0 & u_1 & \dots & \dots & \dots & u_p & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & u_0 & u_1 & \dots & \dots & \dots & u_p \\ v_0 & v_1 & \dots & \dots & v_q & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & v_0 & v_1 & \dots & \dots & v_q & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & v_0 & v_1 & \dots & \dots & v_q \end{pmatrix}$$

Les lignes de la matrice de Sylvester sont les coefficients des polynômes $X^{q-1}P, X^{q-2}P, \dots, P, X^{p-1}Q, \dots, Q$ rapportés à $X^{p+q-1}, \dots, X, 1$. On notera $\text{res}(P, Q)$ le résultant de P et de Q . S'il est utile de préciser le nom de l'indéterminée, on notera $\text{res}_X(P, Q)$. Ce résultant est un polynôme, disons $R(\underline{u}, \underline{v})$ de $\mathbb{Z}[\underline{u}, \underline{v}]$. Si maintenant on spécialise \underline{u} et \underline{v} en des suites \underline{a} et \underline{b} d'éléments de A , on obtient un élément $R(\underline{a}, \underline{b})$ de A , que l'on désignera comme le résultant de $P_{\underline{a}}$ et $Q_{\underline{b}}$, et que l'on notera $\text{res}(P_{\underline{a}}, Q_{\underline{b}})$. Ce résultant se calcule comme le déterminant de la matrice ci-dessus, où les \underline{u} et \underline{v} sont remplacés par les \underline{a} et \underline{b} .

Exercice 1 Montrer que $\text{res}(Q, P) = (-1)^{pq} \text{res}(P, Q)$.

Montrons que 2) entraîne 3). Soit D un diviseur commun non constant de $P_{\underline{a}}$ et $Q_{\underline{b}}$. En posant $U = Q_{\underline{b}}/D$ et $V = -P_{\underline{a}}/D$, on a bien la propriété 3).

Montrons que 3) entraîne 2). De $UP_{\underline{a}} + VQ_{\underline{b}} = 0$, on déduit que $P_{\underline{a}}$ divise VQ . Si $P_{\underline{a}}$ et $Q_{\underline{b}}$ sont premiers entre eux, alors $P_{\underline{a}}$ divise V , ce qui est impossible parce que V est non nul et que $\deg V < p = \deg P_{\underline{a}}$. Donc $P_{\underline{a}}$ et $Q_{\underline{b}}$ ne sont pas premiers entre eux, c.-à-d. qu'ils ont un diviseur commun non constant.

Montrons que 3) est équivalent à 4). La propriété 3) est vérifiée si et seulement s'il existe $\lambda_{q-1}, \dots, \lambda_0, \mu_{p-1}, \dots, \mu_0$ dans K , non tous nuls, tels que

$$\lambda_{q-1}X^{q-1}P_{\underline{a}} + \lambda_{q-2}X^{q-2}P_{\underline{a}} + \dots + \lambda_0P_{\underline{a}} + \mu_{p-1}X^{p-1}Q_{\underline{b}} + \mu_{p-2}X^{p-2}Q_{\underline{b}} + \dots + \mu_0Q_{\underline{b}} = 0.$$

On rapporte l'espace vectoriel des polynômes de $K[X]$ de degré $< p+q$ à la base $X^{p+q-1}, X^{p+q-2}, \dots, X, 1$. Alors l'équation ci-dessus s'écrit comme un système de $p+q$ équations linéaires sans second membre en les $p+q$ inconnues λ_i et μ_j , et la matrice de ce système est la transposée de la matrice de Sylvester de $P_{\underline{a}}$ et $Q_{\underline{b}}$; le déterminant du système est donc $\text{res}(P_{\underline{a}}, Q_{\underline{b}})$. La propriété 3) est vérifiée si et seulement si ce système admet une autre solution que la solution $(0, 0, \dots, 0)$, c'est à dire si et seulement si $\text{res}(P_{\underline{a}}, Q_{\underline{b}}) = 0$. \square

La démonstration ci-dessus est la démonstration classique utilisant l'algèbre linéaire. On peut aussi utiliser la proposition 2. L'implication 4) \Rightarrow 3) est une conséquence immédiate de cette proposition (on trouve U et V en spécialisant $(\underline{u}, \underline{v})$ en $(\underline{a}, \underline{b})$ dans Λ et Θ).

L'énoncé du théorème fondamental dans [Ta] ne mentionne pas l'alternative $a_0 = b_0 = 0$ dans 2). Ceci vient du fait que la définition du résultant dans [Ta] suppose $a_0 \neq 0$ et $b_0 \neq 0$.

Le cas $a_0 = b_0 = 0$ peut d'ailleurs se voir comme l'existence d'une racine commune « à l'infini » pour les polynômes $P_{\underline{a}}$ et $Q_{\underline{b}}$. De manière précise, on homogénéise le polynôme $P_{\underline{a}}$ en posant $(P_{\underline{a}})^h(X, Y) = Y^p P_{\underline{a}}(X/Y)$, et on dit qu'un élément $(\alpha:\beta)$ de la droite projective $\mathbb{P}^1(\overline{K})$ est un zéro de $(P_{\underline{a}})^h$ si $(P_{\underline{a}})^h(\alpha, \beta) = 0$ (ceci ne dépend pas du représentant choisi d'après l'homogénéité). Les zéros $(\alpha:1)$ correspondent aux racines α de $P_{\underline{a}}$ dans \overline{K} , et le point à l'infini $(1:0)$ est zéro de $(P_{\underline{a}})^h$ si et seulement si $a_0 = 0$.

Plusieurs ouvrages ([Mi], [Sa]) expliquent comment calculer le résultant par l'algorithme d'Euclide (en faisant des divisions euclidiennes successives). Ceci vaut pour deux polynômes à coefficients dans un corps. L'exercice suivant permet de voir comment ceci marche.

Exercice 3 Soient

$$\begin{aligned} P_{\underline{a}} &= a_0X^p + a_1X^{p-1} + \dots + a_p, \\ Q_{\underline{b}} &= b_0X^q + b_1X^{q-1} + \dots + b_q \end{aligned}$$

deux polynômes à coefficients dans un corps K , avec $a_0 \neq 0$. On fait la division euclidienne $Q_{\underline{b}} = P_{\underline{a}}F + R$, avec $\deg(R) = d < p$. Montrer que

$$\text{res}(P_{\underline{a}}, Q_{\underline{b}}) = a_0^{q-d} \text{res}(P_{\underline{a}}, R).$$

Si c est une constante dans K , que vaut $\text{res}(P_{\underline{a}}, c)$? Expliquer comment calculer le résultant en utilisant l'algorithme d'Euclide (utiliser aussi l'exercice 1)

On voit bien que cette méthode de divisions successives pose des problèmes de spécialisation quand les coefficients dépendent de paramètres. Il y a cependant une notion de « polynôme sous-résultant », liée à l'utilisation de « pseudo-divisions » dans l'algorithme d'Euclide, qui permet de contourner cette difficulté et qui est utilisée en pratique pour calculer les résultants (on lit dans la documentation de Maple que « the subresultant algorithm is used for polynomials of low degree »). Nous n'entrerons pas dans cette théorie des sous-résultants. Nous nous contentons dans l'exercice suivant de donner une propriété des coefficients dominants des polynômes sous-résultants (ce sont les $\text{sr}_k(P, Q)$).

Exercice 4 On note $\text{sr}_k(P, Q)$ le déterminant de la matrice carrée de taille $p+q-2k$ extraite de la matrice de Sylvester de P et Q en supprimant les k dernières lignes de coefficients de P , les k dernières lignes de coefficients de Q , et les $2k$ dernières colonnes, ceci pour $0 \leq k < \inf(p, q)$. On a en particulier $\text{sr}_0(P, Q) = \text{res}(P, Q)$. Montrer que $\text{sr}_0(P_{\underline{a}}, Q_{\underline{b}}) = \text{sr}_1(P_{\underline{a}}, Q_{\underline{b}}) = \dots = \text{sr}_k(P_{\underline{a}}, Q_{\underline{b}}) = 0$ si et seulement si le degré du plus grand commun diviseur de $P_{\underline{a}}$ et $Q_{\underline{b}}$ est $> k$, ou $a_0 = b_0 = 0$.

On termine cette section par un aspect « géométrie différentielle » du résultant.

Exercice 5 On identifie l'ensemble des polynômes unitaires de degré n à coefficients dans \mathbb{R} à l'espace \mathbb{R}^n au moyen de la bijection $X^n + a_1 X^{n-1} + \dots + a_n \mapsto (a_1, \dots, a_n)$. Moyennant cette identification, on note $\mu : \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^q \rightarrow \mathbb{R}^{p+q}$ l'application qui aux polynômes unitaires A et B de degrés respectivement p et q fait correspondre leur produit AB . Comparer le déterminant jacobien de μ au point (A, B) et le résultant $\text{res}(A, B)$. En déduire le résultat suivant : Si A et B sont premiers entre eux, il existe des voisinages U de A dans \mathbb{R}^p , V de B dans \mathbb{R}^q et W de AB dans \mathbb{R}^{p+q} tels que μ induise un difféomorphisme de $U \times V$ sur W . En particulier, pour tout F dans W il existe un unique couple (G, H) dans $U \times V$ tel que $F = GH$.

2 Applications du résultant

On présente sous forme d'exercices quelques exemples d'application du résultant. Ce sont les vieux ouvrages, notamment de classes préparatoires, qui sont les plus diserts sur ce sujet.

On peut voir dans l'exercice suivant comment le résultant peut être utilisé pour ramener un système de deux équations polynomiales en deux variables à des équations en une variable.

Exercice 6 Calculer le résultant $\text{res}_Y(P, Q)$ des polynômes $P = X^2 - XY + Y^2 - 1$ et $Q = 2X^2 + Y^2 - Y - 2$ par rapport à la variable Y . Utiliser le résultat pour trouver les points d'intersection des ellipses d'équations $P = 0$ et $Q = 0$.

Il faut se souvenir, quand on applique le résultant à la résolution de systèmes polynomiaux comme dans l'exercice ci-dessus, de l'alternative $a_0 = b_0 = 0$ dans la propriété 1) du théorème 3. Par exemple, $\text{res}_Y(XY - 1, XY) = X$, mais la racine 0 du résultant ne se relève sûrement pas en une solution $(0, y)$ du système $XY - 1 = XY = 0$.

Le résultant peut servir à former un polynôme dont les racines sont des expressions algébriques d'une racine d'un polynôme P et d'une racine d'un polynôme Q .

Exercice 7 Soient A et B deux polynômes de $K[X]$, où K est un corps. Fabriquer un polynôme dont les racines sont les sommes d'une racine de A et d'une racine de B . (Quels sont les Y tels que le système $A(X) = B(Y - X) = 0$ ait une solution ?)

Fabriquer un polynôme à coefficients entiers qui a $\sqrt{2} + \sqrt[3]{7}$ pour racine.

Le résultant peut aussi servir pour ce qu'on appelle la « transformation » des équations (voir [LeAr]).

Exercice 8 . Soient A et P des polynômes de $K[X]$. Fabriquer en utilisant le résultant un polynôme dont les racines sont les $P(\alpha)$, pour α racine de A .

Le résultant peut servir à passer d'une paramétrisation rationnelle d'une courbe à son équation algébrique (implication).

Exercice 9 Comment fabriquer l'équation de la courbe paramétrée par $x = A(t)/B(t)$, $y = F(t)/G(t)$, où A, B, F, G sont des polynômes ? Exemple : $x = t^2 + t + 1$, $y = (t^2 - 1)/(t^2 + 1)$.

3 Expression du résultant en fonction des racines

On considère ici les racines $\underline{\alpha} = (\alpha_1, \dots, \alpha_p)$ et $\underline{\beta} = (\beta_1, \dots, \beta_q)$ des polynômes P et Q respectivement comme des indéterminées, afin d'obtenir l'expression du résultant en fonction des ces racines. Ceci veut dire précisément que l'on considère les polynômes

$$P = u_0(X - \alpha_1) \cdots (X - \alpha_p) \quad Q = v_0(X - \beta_1) \cdots (X - \beta_q),$$

éléments de $\mathbb{Z}[u_0, v_0, \underline{\alpha}, \underline{\beta}][X]$. On a alors $\text{res}(P, Q) = \Phi(u_0, v_0, \underline{\alpha}, \underline{\beta})$. Ce Φ est un polynôme à coefficients entiers que l'on va déterminer.

Lemme 4 L $\Phi(u_0, v_0, \underline{\alpha}, \underline{\beta})$ $ar \alpha_i - \beta_j$ r i r r 1 p
 j r r 1 q .

D'ici on voit que : Pour fixer les idées, on prend $i = 1$ et $j = 1$. On fait la division euclidienne de Φ par $\alpha_1 - \beta_1$, par rapport à l'indéterminée α_1 . On obtient

$$\Phi(u_0, v_0, \underline{\alpha}, \underline{\beta}) = (\alpha_1 - \beta_1)S(u_0, v_0, \underline{\alpha}, \underline{\beta}) + T(u_0, v_0, \alpha_2, \dots, \alpha_p, \underline{\beta}). \quad \dagger$$

On spécialise les indéterminées $u_0, v_0, \underline{\alpha}, \underline{\beta}$ en choisissant $a_0, b_0, \underline{\lambda}, \underline{\mu}$ dans \mathbb{C}^{2+p+q} avec $\lambda_1 = \mu_1$. Alors P et Q se spécialisent en des polynômes de $\mathbb{C}[X]$ qui s'annulent tous les deux en $\lambda_1 = \mu_1$, et donc leur résultant $\Phi(a_0, b_0, \underline{\lambda}, \underline{\mu})$ est nul. En reportant dans l'égalité \dagger , on trouve $T(a_0, b_0, \lambda_2, \dots, \lambda_p, \underline{\mu}) = 0$, et ceci quel que soit le choix de $a_0, b_0, \lambda_2, \dots, \lambda_p, \underline{\mu}$ dans \mathbb{C}^{1+p+q} . Donc T est le polynôme nul et $\alpha_1 - \beta_1$ divise Φ . \square

Théorème 5 A *Soient P et Q deux polynômes de degrés p et q respectivement, à coefficients dans un corps K . On a*

$$\text{res}(P, Q) = u_0^q v_0^p \prod_{i=1}^p \prod_{j=1}^q (\alpha_i - \beta_j) = u_0^q \prod_{i=1}^p Q(\alpha_i) = (-1)^{pq} v_0^p \prod_{j=1}^q P(\beta_j).$$

D'ici on voit que : Les $\alpha_i - \beta_j$ sont premiers entre eux deux à deux et ils divisent tous Φ . Par factorialité de $\mathbb{Z}[u_0, v_0, \underline{\alpha}, \underline{\beta}, X]$, leur produit $\prod_{i,j} (\alpha_i - \beta_j)$ divise Φ . On a $\Phi = F \prod_{i,j} (\alpha_i - \beta_j)$, et on cherche à identifier F . On remarque que

$$Q = v_0 X^q - v_0 \sigma_1(\underline{\beta}) X^{q-1} + \dots + (-1)^q v_0 \sigma_q(\underline{\beta}),$$

où les σ_j sont les polynômes symétriques élémentaires. En particulier, chaque σ_j est homogène de degré j en $\underline{\beta}$. L'inspection du déterminant de la matrice de Sylvester qui calcule Φ montre que la partie homogène de plus haut degré en les $\underline{\beta}$ de Φ est donnée par la diagonale, et vaut $u_0^q v_0^p (-1)^{pq} (\beta_1 \cdots \beta_q)^p$. Comme la partie homogène de plus haut degré en les $\underline{\beta}$ de $\prod_{i,j} (\alpha_i - \beta_j)$ est $(-1)^{pq} (\beta_1 \cdots \beta_q)^p$, on en déduit que $F = u_0^q v_0^p$, ce qui donne le résultat annoncé. \square

Exercice 10 Comparer le résultant de $P(X+a)$ et $Q(X+a)$ avec celui de P et Q .

Exercice 11 Montrer que $\text{res}(P, Q_1 Q_2) = \text{res}(P, Q_1) \text{res}(P, Q_2)$.

La démonstration donnée ci-dessus est celle de [La]. Dans [Ta], on commence en fait par montrer directement le résultat de l'exercice 11 pour établir l'expression du résultant en fonction des racines. Le procédé est intéressant (compléter les détails à titre d'exercice). On part d'un polynôme P de degré p à coefficients dans un corps K et on considère la K -algèbre $A = K[X]/P$. Elle est de dimension p sur K avec une base \mathcal{B} formée des classes de $1, X, \dots, X^{p-1}$. Soit Q un polynôme de degré q de $K[X]$. La multiplication par la classe de Q est un endomorphisme K -linéaire de A , noté ψ_Q . Les coordonnées dans \mathcal{B} de $\psi_Q(X^i)$, pour $i = 0, \dots, p-1$, sont les coefficients du reste R_i de la division euclidienne de $X^i Q$ par P . Par ailleurs, le déterminant de la matrice de Sylvester de P et Q est inchangé si on remplace sa $p+q-i$ -ème ligne (celle des coefficients de $X^i Q$) par la ligne des coefficients de R_i . On en déduit que $\text{res}(P, Q) = u_0^q \det(\psi_Q)$. Comme $\psi_{Q_1} \psi_{Q_2} = \psi_{Q_1 Q_2}$, il vient $\text{res}(P, Q_1 Q_2) = \text{res}(P, Q_1) \text{res}(P, Q_2)$.

En particulier, pour P unitaire, $\text{res}(P, Q)$ est le déterminant de ψ_Q . C'est le point de vue utilisé dans [Bo] pour traiter le résultant et établir ses propriétés. Le déterminant de l'endomorphisme de multiplication par un élément f de $A = K[X]/P$ est appelé dans [Bo] la norme de f sur K et noté $N_{A/K}(f)$ (si $K = \mathbb{R}$ et $P = X^2 + 1$, on trouve le carré de la norme habituelle d'un nombre complexe).

Citons sous forme d'exercice une troisième méthode pour établir l'expression du résultant en fonction des racines ([Mi], [Sa]).

Exercice 12 Soient P et Q deux polynômes de degrés p et q respectivement, à coefficients dans un corps algébriquement clos \overline{K} . On a

$$P = a_0(X - \alpha_1) \cdots (X - \alpha_p) \quad Q = b_0(X - \beta_1) \cdots (X - \beta_q),$$

où a_0, b_0 , les α_i et les β_j sont dans \overline{K} . On pose

$$\Psi(P, Q) = a_0^q b_0^p \prod_{i=1}^p \prod_{j=1}^q (\alpha_i - \beta_j).$$

Montrer : (i) $\Psi(Q, P) = (-1)^{pq} \Psi(P, Q)$; (ii) Si le reste de la division euclidienne de Q par P est le polynôme R de degré d , $\Psi(P, Q) = a_0^{q-d} \Psi(P, R)$; (iii) Si b est une constante, $\Psi(P, b) = b^p$.

En comparant comment se calculent Ψ et le résultant en utilisant l'algorithme d'Euclide (voir l'exercice 3), déduire $\text{res}(P, Q) = \Psi(P, Q)$.

Il est à noter que, dans certains ouvrages, le résultant est défini à partir de son expression en fonction des racines.

L'expression du résultant en fonctions des racines $\underline{\alpha}$ et $\underline{\beta}$ montre que le résultant est homogène de degré pq en $(\underline{\alpha}, \underline{\beta})$. Ceci peut se reformuler de la manière suivante. Si $P = u_0 X^p + u_1 X^{p-1} + \dots + u_p$, on attribue à chaque coefficient u_i le poids i (c'est le degré de u_i comme polynôme symétrique homogène en les racines). On fait de même pour $Q = v_0 X^q + \dots + v_q$. On attribue naturellement à chaque monôme $\prod_i u_i^{m_i} \prod_j v_j^{n_j}$ le poids $\sum_i i m_i + \sum_j j n_j$. Alors, tous les monômes qui apparaissent dans le résultant $\text{res}(P, Q) \in \mathbb{Z}[\underline{u}, \underline{v}]$ sont de poids pq . On dit que $\text{res}(P, Q)$ est homogène de poids pq en $(\underline{u}, \underline{v})$. L'exercice suivant fournit une application de ceci. Cette application est la clé de démonstrations « à l'ancienne » du fameux théorème de Bezout qui dit que deux courbes algébriques de degré p et q sans composante commune se coupent en pq points (comptés avec multiplicité) dans le plan projectif complexe (on peut voir à ce sujet [Ma], chapitre 11, section 8).

Exercice 13 Soient P et Q deux polynômes homogènes en les variables (X, Y, Z) , de degrés p et q respectivement. Montrer que $\text{res}_X(P, Q)$ est un polynôme homogène de degré pq en (Y, Z) .

Il y a un autre résultat d'homogénéité du résultant (ne pas confondre), moins intéressant, qui ne fait pas intervenir de poids et qui se montre directement à partir de la définition.

Exercice 14 Montrer que le résultant $\text{res}(P, Q)$ est un polynôme homogène de degré q en les coefficients \underline{u} de P , et homogène de degré p en les coefficients \underline{v} de Q .

4 Discriminant

Soit $P = X^p + a_1 X^{p-1} + \dots + a_p$ un polynôme unitaire à coefficients dans un corps K . Soient $\alpha_1, \dots, \alpha_p$ les p racines de P (comptées avec multiplicité) dans un corps algébriquement clos \overline{K} contenant K . Le discriminant $\text{dis}(P)$ de P , noté $\text{dis}(P)$, est

$$\text{dis}(P) = \prod_{1 \leq i < j \leq p} (\alpha_i - \alpha_j)^2.$$

Autrement dit, le discriminant de P est le produit des carrés des différences entre ses racines.

Exercice 15 Calculer le discriminant de $X^3 + pX + q$.

Exercice 16 Soit P un polynôme unitaire à coefficients réels, de degré p . Montrer que si $\text{dis}(P) > 0$, alors le nombre de racines réelles de P est congru à p modulo 4, et que si $\text{dis}(P) < 0$, alors le nombre de racines réelles de P est congru à $p - 2$ modulo 4. Si $P = X^3 + pX + q$, discuter son nombre de racines réelles.

Théorème 6 Soit $P = X^p + a_1 X^{p-1} + \dots + a_p$ un polynôme unitaire à coefficients dans un corps K . Soient $\alpha_1, \dots, \alpha_p$ les racines de P dans un corps algébriquement clos \overline{K} contenant K . On pose $D_p(a_1, \dots, a_p) = \text{dis}(P)$.

1. $D_p(a_1, \dots, a_p) \in \mathbb{Z}[a_1, \dots, a_p]$.
2. $D_p(a_1, \dots, a_p) \in \overline{K}$ si et seulement si $a_1, \dots, a_p \in \overline{K}$.
3. $\text{dis}(P) = 0$.

On considère $\prod_{1 \leq i < j \leq p} (T_i - T_j)^2$ qui est un polynôme à coefficients entiers en les indéterminées T_1, \dots, T_p . C'est un polynôme symétrique en les T_i . Donc il s'écrit, et de manière unique, comme polynôme $\Pi(\sigma_1, \dots, \sigma_p)$ à coefficients entiers en les polynômes symétriques élémentaires des T_i . On pose alors $D_p(u_1, \dots, u_p) = \Pi(-u_1, u_2, \dots, (-1)^p u_p)$. On a bien, pour tout corps K et tout polynôme

unitaire $P = X^p + a_1 X^{p-1} + \dots + a_p$ de degré p dans $K[X]$, $\text{dis}(P) = D_p(a_1, \dots, a_p)$. Noter que le discriminant de P appartient bien à K , et ne dépend pas du choix de l'extension algébriquement close \overline{K} .

Montrons maintenant l'équivalence annoncée. L'équivalence des deux premières propriétés a été vue à la proposition 1. L'équivalence des deux dernières est claire avec la définition donnée pour le discriminant. \square

Exercice 17 On note $M_p(\mathbb{C})$ l'espace des matrices carrées $p \times p$ à coefficients dans \mathbb{C} . Montrer que le sous-ensemble des matrices qui ont toutes leurs valeurs propres distinctes est ouvert dans $M_p(\mathbb{C})$. Est-ce qu'il en est de même pour les matrices diagonalisables ?

On n'est pas, pour définir le discriminant, parti d'un polynôme unitaire $X^p + u_1 X^{p-1} + \dots + u_p$ à coefficients u_1, \dots, u_p indéterminés. La première partie du théorème 6 permet de le faire, en disant que le discriminant d'un tel polynôme est $D_p(u_1, \dots, u_p)$, élément de $\mathbb{Z}[u_1, \dots, u_p]$. On peut ensuite spécialiser u_1, \dots, u_p .

Exercice 18 ([LeAr]) On connaît le déterminant de Vandermonde

$$V(\alpha_1, \dots, \alpha_p) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \dots & \alpha_p \\ \alpha_1^2 & \alpha_2^2 & \dots & \alpha_p^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \alpha_1^{p-1} & \alpha_2^{p-1} & \dots & \alpha_p^{p-1} \end{vmatrix}.$$

Montrer que, si $\alpha_1, \dots, \alpha_p$ sont les racines de P , on a $\text{dis}(P) = V(\alpha_1, \dots, \alpha_p)^2$. En déduire que

$$\text{dis}(P) = \begin{vmatrix} \nu_0 & \nu_1 & \nu_2 & \dots & \nu_{p-1} \\ \nu_1 & \nu_2 & \dots & \dots & \nu_p \\ \nu_2 & \dots & \dots & \dots & \vdots \\ \vdots & \dots & \dots & \dots & \vdots \\ \nu_{p-1} & \nu_{p-2} & \dots & \dots & \nu_{2p-2} \end{vmatrix},$$

où les ν_k sont les N des racines α_i définies par $\nu_0 = p$ et $\nu_k = \sum_{i=1}^p \alpha_i^k$ pour $k > 0$.

Les équivalences du théorème 6 et celles du théorème 3 montrent que le discriminant du polynôme unitaire P est nul si et seulement si le résultant de P et de P' est nul. On a en fait :

Proposition 7 $\text{dis}(P) = (-1)^{p(p-1)/2} \text{res}(P, P')$.

$$\text{dis}(P) = (-1)^{p(p-1)/2} \text{res}(P, P').$$

D' \bullet ra \bullet : L'expression du résultant en fonction des racines nous donne

$$\begin{aligned} \text{res}(P, P') &= \prod_{i=1}^p P'(\alpha_i) = \prod_{i=1}^p \prod_{j \neq i} (\alpha_i - \alpha_j) = (-1)^{p(p-1)/2} \prod_{1 \leq i < j \leq p} (\alpha_i - \alpha_j)^2 \\ &= (-1)^{p(p-1)/2} \text{dis}(P). \end{aligned}$$

\square

Il y a ce signe embêtant qui distingue le discriminant (dans sa définition traditionnelle) et le résultant de P et P' . Ceci peut conduire à une erreur de signe comme dans la première édition de [La]. D'autres ouvrages (comme [Ta]) choisissent de définir le discriminant comme le résultant de P et P' .

Nous n'avons pour le moment défini le discriminant que dans le cas d'un polynôme unitaire. Soit $P = u_0 X^p + \dots + u_p$ un polynôme à coefficients indéterminés, que l'on ne suppose plus unitaire. On se ramène à un polynôme unitaire (à coefficients dans le corps de fractions de $\mathbb{Z}[u]$) en divisant par u_0 , et le discriminant de ce polynôme unitaire est $\text{dis}(P/u_0) = (-1)^{p(p-1)/2} \text{res}(P/u_0, P'/u_0)$ d'après la

proposition 7. Par ailleurs, on a $\text{res}(P, P') = u_0^{2p-1} \text{res}(P/u_0, P'/u_0)$ et, vu que u_0 est en facteur dans la première colonne de la matrice de Sylvester de P et P' , $\text{res}(P, P')$ est divisible par u_0 dans $\mathbb{Z}[u]$. Donc $u_0^{2p-2} \text{res}(P/u_0, P'/u_0)$ est un polynôme à coefficients entiers en u_0, \dots, u_n . Ceci conduit à poser

$$\text{dis}(P) = u_0^{2p-2} \prod_{1 \leq i < j \leq p} (\alpha_j - \alpha_i)^2,$$

et on a :

Proposition 8 $\text{dis}(P) = u_0^{2p-2} \text{res}(P/u_0, P'/u_0)$

$$u_0 \text{dis}(P) = (-1)^{p(p-1)/2} \text{res}(P, P').$$

Ici aussi, certains auteurs s'écartent de la tradition. Dans [Ta] par exemple, le discriminant est dans tous les cas le résultant de P et P' , mais alors la formule de la proposition 5.9 loc.cit. (conforme à la tradition au signe près) est fautive (lire a_p^{2p-1} au lieu de a_p^{2p-2}). On peut noter que le discriminant de Maple est bien le discriminant traditionnel, tel qu'il a été défini ici.

Exercice 19 Calculer le discriminant de $P = aX^2 + bX + c$. Comparer avec $\text{res}(P, P')$.

Exercice 20 Soient P_1 et P_2 deux polynômes unitaires. Exprimer $\text{dis}(P_1 P_2)$ en fonction de $\text{dis}(P_1)$, $\text{dis}(P_2)$ et $\text{res}(P_1, P_2)$

L'exercice suivant offre une justification plus sérieuse que la tradition du choix fait dans la définition du discriminant. Notons $K[X]_p$ l'espace des polynômes à coefficients dans K de degré $\leq p$. Soit $\text{dis}_p : K[X]_p \rightarrow K$ la fonction polynomiale en les coefficients u_0, \dots, u_p qui donne le discriminant d'un polynôme (Proposition 8); on l'applique même quand un certain nombre des coefficients de tête s'annulent. On considère aussi l'action (à droite) du groupe spécial linéaire $\text{SL}(2, K)$ sur $K[X]_p$ définie par :

$$P(X) \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = (cX + d)^p P\left(\frac{aX + b}{cX + d}\right).$$

Exercice 21 Montrer que dis_p est un invariant pour l'action de $\text{SL}(2, K)$: pour tout $P \in K[X]_p$ et tout $g \in \text{SL}(2, K)$, $\text{dis}_p(P \cdot g) = \text{dis}_p(P)$. (On peut choisir des générateurs simples de $\text{SL}(2, K)$, et supposer pour commencer que P est effectivement de degré p et à terme constant non nul.)

5 Une démonstration du théorème des zéros utilisant le résultant

Cette section s'inspire des toutes premières pages du volume 2 de Modern Algebra de van der Waerden. On y voit comment le résultant peut être utilisé pour éliminer une variable dans un système de plus de deux équations. La démonstration du théorème des zéros de Hilbert donnée ci-dessous est terriblement vieux jeu. Elle présente l'avantage d'être effective, en ce sens qu'on peut en extraire un algorithme pour calculer les polynômes h_1, \dots, h_m de l'énoncé (comparer avec les exercices 5.20 et 5.21 dans le recueil de S. Francinou et H. Gianella).

Lemme 9 Soit K un corps infini, $P \in K[X_1, \dots, X_n]$ un polynôme homogène de degré d . Soit $a_1, \dots, a_{n-1} \in K$.

$$P(X_1 + a_1 X_n, \dots, X_{n-1} + a_{n-1} X_n, X_n)$$

est un polynôme en X_n de la forme $cX_n^d + Q$, où $c \in K$ et Q est un polynôme de degré $< d$ en X_n .

Démonstration : Soit Π la partie homogène de degré d de P . On a

$$P(X_1 + a_1 X_n, \dots, X_{n-1} + a_{n-1} X_n, X_n) = \Pi(a_1, \dots, a_{n-1}, 1) X_n^d + Q,$$

où Q est un polynôme de degré $< d$ par rapport à X_n . Puisque le polynôme $\Pi(T_1, \dots, T_{n-1}, 1)$ n'est pas nul et que K est infini, on peut choisir (a_1, \dots, a_{n-1}) dans K^{n-1} pour que $\Pi(a_1, \dots, a_{n-1}, 1) \neq 0$. \square

Théorème 10 (Théorème des zéros de Hilbert) Soit K un corps infini, $f_1, \dots, f_m \in K[X_1, \dots, X_n]$ et $g \in K[X_1, \dots, X_n]$. On suppose que g n'est pas constant et qu'il existe un zéro commun à f_1, \dots, f_m dans K . Alors, il existe des polynômes $h_1, \dots, h_m \in K[X_1, \dots, X_n]$ tels que $1 = f_1 h_1 + \dots + f_m h_m$.

Démonstration : On procède par récurrence sur n . Pour $n = 1$, l'idéal engendré par f_1, \dots, f_m dans $K[X_1]$ est principal, et engendré par g . Si g n'est pas constant, il a un zéro dans K puisque K est algébriquement clos, et ce zéro est commun à tous les f_i .

Supposons maintenant $n > 1$, et le théorème vrai pour $n - 1$. On peut supposer qu'aucun des f_i n'est nul. Puisque K est infini, on peut supposer que le polynôme f_1 est unitaire en X_n , quitte à faire un changement linéaire de variables (Lemme 9). Introduisons une nouvelle indéterminée U , et posons

$$g(U, X_1, \dots, X_n) = f_2 + U f_3 + \dots + U^{m-2} f_m.$$

On calcule le résultant de f_1 et de g par rapport à X_n . Ce résultant appartient à $K[U, X_1, \dots, X_{n-1}]$, et on l'écrit

$$\text{res}_{X_n}(f_1, g) = D_k(X_1, \dots, X_{n-1})U^k + \dots + D_0(X_1, \dots, X_{n-1}).$$

Ce résultant est dans l'idéal engendré par f_1 et g (proposition 2), et on a des polynômes Λ et Θ de $K[U, X_1, \dots, X_n]$ tels que

$$\text{res}_{X_n}(f_1, g) = \Lambda f_1 + \Theta g.$$

En identifiant les coefficients dans cette égalité entre deux polynômes en U , on voit que les D_0, \dots, D_k sont dans l'idéal engendré par f_1, \dots, f_m .

Supposons alors que D_0, \dots, D_k ont un zéro commun x' dans K^{n-1} . Pour tout a appartenant à K , on a $\text{res}_{X_n}(f_1, g)(a, x') = 0$. Comme f_1 est unitaire en X_n , son coefficient dominant en X_n ne s'annule jamais, et donc (théorème 3) l'annulation du résultant entraîne que pour tout $a \in K$ les polynômes $f_1(x', X_n)$ et $g(a, x', X_n)$ ont une racine commune dans K . Comme $f_1(x', X_n)$ a un nombre fini de racines dans K , il y en a une, disons α , qui est racine de $g(a, x', X_n)$ pour une infinité de $a \in K$. Puisque $g(U, x', \alpha)$ a une infinité de racines en U , il est nul, et donc on a $f_2(x', \alpha) = \dots = f_m(x', \alpha) = 0$. Ainsi (x', α) est un zéro commun à f_1, \dots, f_m , ce qui est contraire à l'hypothèse.

On sait donc que D_0, \dots, D_k n'ont aucun zéro commun dans K^{n-1} . Par l'hypothèse de récurrence, 1 appartient à l'idéal engendré par D_0, \dots, D_k dans $K[X_1, \dots, X_{n-1}]$. Comme on a vu que les D_0, \dots, D_k sont dans l'idéal engendré par f_1, \dots, f_m dans $K[X_1, \dots, X_n]$, on en conclut que 1 appartient aussi à cet idéal, ce qui veut dire qu'il existe des polynômes h_1, \dots, h_m de $K[X_1, \dots, X_n]$ tels que $1 = f_1 h_1 + \dots + f_m h_m$. \square

Références

- [Bo] N. BOURBAKI : *Algèbre*, Chapitres 4 à 7, Masson, 1981.
- [La] S. LANG : *Algèbre*, Addison-Wesley, 1984.
- [LeAr] J. LELONG-FERRAND et J.-M. ARNAUDIÈS : *Compléments à l'algèbre commutative*, T. 1 : *Algèbre*, Dunod, 1978.
- [Ma] M.-P. MALLIAVIN : *Algèbre*, Masson, 1984.
- [Mi] M. MIGNOTTE : *Algèbre commutative*, P.U.F., 1981.
- [Qu] M. QUEYSANNE : *Algèbre*, Armand Colin, 1964.
- [Sa] P. SAUX PICART : *Compléments à l'algèbre commutative*, Ellipses, 1999.
- [Ta] P. TAUVEL : *Algèbre commutative*, Masson, 1992.

Les solutions des exercices calculatoires (traités avec Maple) peuvent être vues à l'adresse

<http://agreg-maths.univ-rennes1.fr/documentation/docs/exoselim.html>

Toutes les remarques sont les bienvenues pour la prochaine version !