SIMPLICITÉ DU GROUPE ORTHOGONAL $SO(3,\mathbb{R})$

par Christian Naumovic

Théorème. — *Soit E un espace vectoriel euclidien de dimension 3. Le groupe spécial orthogonal $SO(E)$ de E est un groupe simple, i.e. n'admet pas d'autre sous-groupe distingué que le groupe trivial et lui-même.*

Démonstration. — Considérons l'application bien définie suivante :

$$\begin{aligned}\theta : SO(E) &\to [0,\pi] \\ g &\mapsto \arccos(\tfrac{\mathrm{Tr}(g)-1}{2})\end{aligned}.$$

Soit H un sous-groupe distingué connexe non trivial de $SO(E)$. L'application θ est continue et H est connexe, ainsi $\theta(H)$ est connexe. C'est donc un sous-intervalle de $[0,\pi]$. Comme θ envoie l'identité sur 0, il vient que $\theta(H)$, qui contient 0, est de la forme $[0,\alpha[$ ou $[0,\alpha]$, avec $\alpha \in [0,\pi]$. Comme H est non trivial, H contient un élément distinct de l'identité, dont l'image par θ est non nulle, ainsi $\alpha \in]0,\pi]$. Soient maintenant $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $\frac{\pi}{n} \in]0,\alpha[\subset \theta(H)$ et $h \in H$ tel que $\theta(h) = \frac{\pi}{n}$. Alors $h^n \in H$ et $\theta(h^n) = \pi$, donc H contient un retournement. Comme les retournements de $SO(E)$ sont tous conjugués et que H est distingué, H contient tous les retournements. Comme ces derniers engendrent $SO(E)$, le groupe H est égal à $SO(E)$.

On suppose désormais H seulement distinct de $SO(E)$. Soit H^0 la composante connexe (dans H) de l'identité. C'est un sous-groupe de H car la multiplication $m : H \times H \to H$ est continue et transforme par conséquent le connexe $H^0 \times H^0$ en un connexe de H contenant bien sûr l'identité, donc contenu dans

Christian Naumovic, UMR CNRS 6625, IRMAR, Université de Rennes 1, Campus de Beaulieu, 35042 Rennes Cedex, France • *E-mail :* christian.naumovic@univ-rennes1.fr
Url : http://name.math.univ-rennes1.fr/christian.naumovic

H^0 (par définition de la composante connexe de l'identité). Un raisonnement similaire appliqué aux morphismes

$$\begin{aligned} \mathrm{int}(g) : H &\to H \\ h &\mapsto ghg^{-1} \end{aligned}$$

pour $g \in SO(E)$ assure que H^0 est en fait un sous-groupe distingué de $SO(E)$, et c'est un groupe connexe par définition. Le cas traîté au début de la preuve assure alors que H^0 est trivial (car s'il ne l'était pas, le cas traîté entraînerait que H^0, donc H est égal à $SO(E)$, ce qui est contraire à l'hypothèse faite sur H). Soit maintenant $h \in H$. Considérons l'application

$$\begin{aligned} \varphi_h : SO(E) &\to H \\ g &\mapsto ghg^{-1}h^{-1} \end{aligned}.$$

Elle est bien définie (car H est distingué) et est continue. Comme $SO(E)$ est connexe, son image est connexe, et comme elle contient l'identité, elle est contenue dans H^0 qui est trivial. Donc φ_h est constante égale à l'identité, ce qui veut dire que h est dans le centre de $SO(E)$. Comme ce dernier est trivial (tout élément du centre de $SO(E)$ laisse fixe toutes les droites puisque commute à toutes les rotations) h est l'identité. Par suite H est trivial. Le théorème est donc démontré. $\square$