TD Polynômes à plusieurs variables

Zéros de polynômes en plusieurs variables - prolongement des identités.

1) Donner un polynôme $P \in \mathbb{R}[X_1, X_2]$ qui a une infinité de zéros dans $\mathbb{R}^2$ mais qui n'est pas nul.

2) Soit $P \in \mathbb{K}[X_1, \ldots, X_n]$. On suppose qu'il existe des sous-ensembles infinis $I_1, \ldots, I_n$ de $\mathbb{K}$ telles que, pour tout $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n)$ dans $I_1 \times \cdots \times I_n$, $P(\mathbf{x}) = 0$. Montrer que P est le polynôme nul.

Pour les question 3) à 5), $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

3) Soit $P \in \mathbb{K}[X_1, \ldots, X_n]$. Montrer que s'il existe un ouvert non vide Ω de $\mathbb{K}^n$ tel que $P(\mathbf{x}) = 0$ pour tout $\mathbf{x}$ de Ω, alors P est le polynôme nul.

4) Montrer que si $P \in \mathbb{K}[X_1, \ldots, X_n]$ n'est pas le polynôme nul, alors $\{\mathbf{x} \in \mathbb{K}^n \mid P(\mathbf{x}) \neq 0\}$ est un ouvert dense de $\mathbb{K}^n$.

5) Montrer que $GL_n(\mathbb{K})$ est un ouvert dense de $M_n(\mathbb{K})$. Montrer que pour toutes matrices A, B de $M_n(\mathbb{K})$, le polynôme caractéristique de AB est égal à celui de BA.

Quelques déterminants.

6) Montrer que $X_1 - X_2$ divise $P(X_1, \ldots, X_n)$ dans $\mathbb{K}[X_1, \ldots, X_n]$ si et seulement si $P(X_1, X_1, X_3, \ldots, X_n) = 0$. Etudier la divisibilité de $X^n - Y^n$, $X^n + Y^n$ par $X - Y$ ou $X + Y$ dans $\mathbb{K}[X, Y]$.

On pose

$$V_n = \det \begin{pmatrix} 1 & X_1 & \ldots & X^{n-1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & X_n & \ldots & X_n^{n-1} \end{pmatrix} \in \mathbb{Z}[X_1, \ldots, X_n] \,.$$

7) Montrer que V_n est divisible par $X_j - X_i$ pour tous $i < j$. En déduire que $V_n = c \prod_{1 \leq i < j \leq n} (X_j - X_i)$, où c est une constante. Déterminer c.

8) Dans l'anneau de polynômes $\mathbb{K}[(X_{i,j})_{i,j=1,\ldots,n}]$, montrer que $\det(X_{i,j})$ est irréductible.

Polynômes symétriques.

Les polynômes symétriques élémentaires à n variables sont

$$\begin{aligned} \sigma_1 &= \sum_{i=1}^{n} X_i \\ &\vdots \\ \sigma_k &= \sum_{1 \leq i_1 < \ldots < i_k \leq n} X_{i_1} \cdots X_{i_k} \\ &\vdots \\ \sigma_n &= X_1 \cdots X_n \,. \end{aligned}$$

On rappelle le résultat central : Soit A un anneau commutatif unitaire, $P \in A[X_1, \ldots, X_n]$ un polynôme symétrique ; alors il existe un unique polynôme $Q \in A[Y_1, \ldots, Y_n]$ tel que $P = Q(\sigma_1, \ldots, \sigma_n)$.

9) Déterminer si les polynômes suivants sont symétriques et, si oui, les écrire comme polynômes en les polynômes symétriques élémentaires.

$$X_1^2 X_2 + X_2^2 X_3 + X_3^2 X_1, \quad (X_1 + X_2)(X_2 + X_3)(X_3 + X_1), \quad X_1^3 + \cdots + X_n^3.$$

Le discriminant.

10) Soit $P_n = \prod_{1\le i<j\le n}(X_j - X_i)^2$. Montrer qu'il existe un unique polynôme $\Delta_n \in \mathbb{Z}[Y_1, \dots, Y_n]$ tel que $P_n = \Delta_n(\sigma_1, \dots, \sigma_n)$. Calculer Δ_2.

Soit $f = T^n + a_1 T^{n-1} + \cdots + a_n$ un polynôme unitaire de degré n de $A[T]$. On pose $\mathrm{disc}(f) = \Delta_n(-a_1, a_2, \dots, (-1)^n a_n)$ (le discriminant de f).

11) Soit $P \in \mathbb{C}[T]$ unitaire. Montrer que P a une racine multiple si et seulement si $\mathrm{disc}(f) = 0$.

12) Montrer que l'ensemble des matrices de $M_n(\mathbb{C})$ dont les valeurs propres sont toutes distinctes est un ouvert dense de $M_n(\mathbb{C})$. Montrer que les matrices diagonalisables forment un sous-ensemble dense de $M_n(\mathbb{C})$. En déduire une démonstration du théorème de Cayley-Hamilton pour $M_n(\mathbb{C})$ en vérifiant d'abord ce théorème pour les matrices diagonalisables.

Polynômes homogènes

Un polynôme $P \in \mathbb{K}[X_1, \dots, X_n]$ est dit homogène de degré d s'il est combinaison linéaire à coefficients dans $\mathbb{K}$ de monômes $X_1^{\alpha_1} \cdots X_n^{\alpha_n}$ avec $\alpha_1 + \cdots + \alpha_n = d$. Par exemple, σ_k est homogène de degré k.

13) Calculer en fonction de n et d la dimension de l'espace vectoriel des polynômes de degré d en n variables.

14) Montrer que P est homogène de degré d si et seulement si $P(TX_1, \dots, TX_n) = T^d P(X_1, \dots, X_n)$. Montrer que si P est homogène de degré d, alors

$$d\,P = \sum_{i=1}^{n} X_i \,\frac{\partial P}{\partial X_i}\ .$$

15) Vérifier que $\prod_{1\le i<j\le n}(X_j - X_i)^2$ est homogène ; quel est son degré ?

16) Soit $P \in \mathbb{K}[X_1, \dots, X_n]$ un polynôme symétrique homogène de degré d. Montrer que P s'écrit sous la forme $P = \sum_{\nu \in H_d} a_\nu \sigma_1^{\nu_1} \cdots \sigma_n^{\nu_n}$, où

$$H_d = \{\nu = (\nu_1, \dots, \nu_n) \in \mathbb{N}^n \mid \nu_1 + 2\,\nu_2 + \cdots + n\,\nu_n = d\}\ .$$

17) Soit $f = T^3 + pT + q$. Montrer que $\mathrm{disc}(f) = a\,p^3 + b\,q^2$ avec a et b entiers. Déterminer a et b en choisissant des f convenables.