LE THÉORÈME D'INVERSION DE FOURIER DU POINT DE VUE DES DISTRIBUTIONS

BACHIR BEKKA

Le théorème d'inversion de Fourier est l'assertion que la transformée de Fourier $\mathcal{F} : \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \to \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ est une bijection de l'espace de Schwartz $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ dans lui même, dont l'inverse est donnée par $\mathcal{F}^{-1}(f)(x) = \mathcal{F}(f)(-x)$ pour $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ et $x \in \mathbb{R}^n$ (pour une normalisation convenable de $\mathcal{F}$). Quand on étend, par dualité, la transformée de Fourier à l'espace des distributions tempérées, ce résultat se réduit tout simplement à la formule $\mathcal{F}(\mathbf{1}) = \ :$ L'objet de cette note est de montrer directement cette dernière formule, en interprétant dans cette optique la preuve du théorème d'inversion donnée dans le Chapitre 7 de W. Rudin : Functional analysis, McGraw-Hill, 1973. Plus précisément, soit $' \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ arbitraire avec $'(0) = 1$ et considérons la famille $('_t)_{t>0}$ définie par $'_t(x) = '(tx):$ Il est immédiat que $\lim_{t\to 0} '_t = \mathbf{1}$ et que $\lim_{t\to 0} \mathcal{F}('_t) = \quad$ dans $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n);$ avec $\quad = \mathcal{F}(\mathcal{F}('))(0):$ Comme $\mathcal{F}$ est continue, il s'ensuit que $\mathcal{F}(\mathbf{1}) = \quad :$ Il suffit alors de tester ces deux distributions sur une fonction $'$ dans $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ avec $'(0) \neq 0;$ par exemple une gaussienne, pour conclure que $\quad = 1$ (pour la normalisation choisie de $\mathcal{F}$).

1. Le théorème d'inversion de Fourier

On note $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ l'espace de Schwartz de $\mathbb{R}^n$, espace des fonctions indéfiniment dérivables $\mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ à décroissance rapide (voir Section 3, plus loin). Nous noterons $\mathcal{F}(f)$ la transformée de Fourier de $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$:

$$\mathcal{F}(f)(y) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x) e^{-2\pi i x\cdot y} dx \qquad \text{pour tout} \quad y \in \mathbb{R}^n;$$

où $x \cdot y = \sum_{j=1}^n x_j y_j:$

Remarque : Le choix de cette normalisation de la transformée de Fourier est le seul pour lequel on a $\mathcal{F}(f * g) = \mathcal{F}(f)\mathcal{F}(g)$ pour tous $f, g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ et pour lequel, en même temps, $\mathcal{F}$ est une isométrie pour la norme L^2. Cette normalisation a l'inconvénient de faire apparaître des facteurs 2π pour les transformées de Fourier des dérivées (voir Lemme 4 plus bas) ; pour cette raison, les spécialistes en EDP préfèrent le choix $\mathcal{F}(f)(y) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x)e^{-ix\cdot y}dx$ (comme dans J-M. Bony : Cours d'analyse, Editions de l'Ecole Polytechnique, 2006) ou $\mathcal{F}(f)(y) = (2\pi)^{-n/2} \int_{\mathbb{R}^n} f(x)e^{-ix\cdot y}dx$ (comme dans M. Reed et B. Simon : Functional analysis I, Academic Press, 1980 et dans W. Rudin : Functional analysis, McGraw-Hill, 1973)

Théorème 1. ***(Théorème d'inversion de Fourier)*** *Pour tout* $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n);$ *on a* $\mathcal{F}(\mathcal{F}(f))(x) = f(-x)$, *c-à-d*

$$f(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \mathcal{F}(f)(y) e^{2\pi i x\cdot y} dy \qquad \textit{pour tout} \quad x \in \mathbb{R}^n:$$

Ceci signifie encore que $\mathcal{F} : \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \to \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ *est une bijection linéaire d'inverse donné par* $\mathcal{F}^{-1}(f)(x) = \mathcal{F}(f)(-x):$

Date: 16 avril 2013.

Déduisons le Théorème 1 du Théorème 2 : en effet l'égalité $\mathcal{F}(\mathbf{1}) =$ signifie que $\int_{\mathbb{R}^n} \mathcal{F}(f)(y)dy = f(0);$ pour tout $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n):$ Soit $a \in \mathbb{R}^n:$ Alors, en appliquant cette formule à $\ _a(f)$, la translatée de f par $-a$, on obtient $\int_{\mathbb{R}^n} \mathcal{F}(\ _a(f))(y)dy = \ _a(f)(0):$ Comme, d'une part, $\ _a(f)(0) = f(-a)$ et, d'autre part (Lemme 3), $\mathcal{F}(\ _a(f))(y) = e^{-2\pi i y.a}\mathcal{F}f(y);$ on a bien $\mathcal{F}(\mathcal{F}f)(a) = f(-a):$

Réciproquement, le Théorème 2 se déduit immédiatement du Théorème 1 :

$$\langle \mathcal{F}(\mathbf{1}); f\rangle = \int_{\mathbb{R}^n} \mathcal{F}(f)(y)dy = \mathcal{F}(\mathcal{F}f)(0) = f(0) = \langle \ ; f\rangle:$$

2. Quelques rappels sur l'espace $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ et sa topologie

L'espace $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ est l'espace des fonctions indéfiniment dérivables $' : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ telles que

$$\sup_{x\in\mathbb{R}^n} |x^\alpha D^\beta '(x)| < +\infty;$$

où $x^\alpha = x_1^{\alpha_1}\cdots x_n^{\alpha_n}$ et $D^\beta = \frac{\partial^{|\beta|}}{\partial x_1^{\beta_1}\cdots\partial x_n^{\beta_n}}$ pour des multi-indices $\ = (\ _1; \cdots ;\ _n)$ et $\ = (\ _1; \cdots ;\ _n)$ dans $\mathbb{N}^n$ et

On rappelle qu'une forme linéaire $T : \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \to \mathbb{C}$ est continue (c-à-d qu'elle définit une distribution tempérée) si et seulement s'il existe $N \in \mathbb{N}$, et $C > 0$ tels que

$$|\langle T, f\rangle| \leq C\|f\|_N \qquad \text{pour tout} \quad f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n).$$

3. Quelques propriétés basiques de la transformation de Fourier sur $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$

Pour une fonction $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$, $a \in \mathbb{R}^n$ et $t > 0$, on définit $\tau_a(f) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ et $h_t(f) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ par

$$\tau_a(f)(x) = f(x-a), \qquad h_t(f) = f(tx) \qquad \text{pour tout} \quad x \in \mathbb{R}^n.$$

Les formules suivantes se vérifient immédiatement, par un changement de variable.

Lemme 3. *Soient $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, $a \in \mathbb{R}^n$ et $t > 0$, on a, pour tout $y \in \mathbb{R}^n$:*
- $\mathcal{F}(\tau_a(f))(y) = e^{-2\pi i y.a}\mathcal{F}f(y)$;
- $\mathcal{F}(h_t(f)) = t^{-n}h_{1/t}(\mathcal{F}f).$

Pour un polynôme $P = \sum_{|\alpha|\leq m} a_\alpha x^\alpha \in \mathbb{C}[X_1, \dots, X_n]$ on pose

$$P(D) = \sum_{|\alpha|\leq m} \frac{a_\alpha}{(2\pi i)^{|\alpha|}} D^\alpha, \qquad P(-D) = \sum_{|\alpha|\leq m} \frac{(-1)^{|\alpha|}a_\alpha}{(2\pi i)^{|\alpha|}} D^\alpha.$$

Les formules suivantes se vérifient immédiatement, en utilisant des intégrations par parties et la règle de dérivation d'une intégrale dépendant d'un paramètre.

Lemme 4. *Soient $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ et $j \in \{1, \dots, n\}$. On a, pour tout polynôme $P \in \mathbb{C}[X_1, \dots, X_n]$,*
- $\mathcal{F}(P(D)f) = P(\mathcal{F}f)$;
- $\mathcal{F}(Pf) = P(-D)(\mathcal{F}f).$

Corollaire 5.
- *Pour tout $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, on a $\mathcal{F}(f) \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$;*
- *la transformation de Fourier $\mathcal{F} : \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \to \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ est un opérateur continu.*

Preuve Pour tous $\alpha, \beta \in \mathbb{N}^*$, on a, en utilisant les formules du Lemme 4,

$$\begin{aligned}
\|\mathcal{F}(f)\|_{\alpha,\beta} &= \sup_{y\in\mathbb{R}^n} |y^\alpha D^\beta \mathcal{F}(f)(y)| = (2\pi)^{|\beta|-|\alpha|} \sup_{y\in\mathbb{R}^n} \left|\mathcal{F}\left(D^\alpha(x^\beta f(x))\right)(y)\right| \\
&\leq (2\pi)^{|\beta|-|\alpha|} \int_{\mathbb{R}^n} |D^\alpha(x^\beta f(x))|dx \\
&\leq (2\pi)^{|\beta|-|\alpha|} \sup_{x\in\mathbb{R}^n} (1+\|x\|)^k |D^\alpha(x^\beta f(x))| \int_{\mathbb{R}^n} (1+\|y\|)^{-k}dy \\
&\leq (2\pi)^{|\beta|-|\alpha|} C\|f\|_{|\alpha|+k},
\end{aligned}$$

où $k \in \mathbb{N}$ est tel que $C := \int_{\mathbb{R}^n}(1+\|y\|)^{-k}dy < \infty$. Les deux assertions du corollaire en découlent. ■

4. Preuve du Théorème 2

Fixons une fonction $'$ dans $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ avec $'(0) = 1:$ On considère la famille $('_t)_{t>0}$ dans $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ définie par $'_t(x) = h_t(')(x) = '(tx):$ Par le Lemme 3, la transformée de Fourier de $'_t$ est donnée par $\mathcal{F}('_t)(y) = t^{-n}\mathcal{F}(')(y/t):$

La proposition suivante est l'étape essentielle dans la preuve du Théorème 2.

Proposition 6. *On pose* $\quad = \mathcal{F}(\mathcal{F}(')(0):$ *On a*

$$\lim_{t\to 0} '_t = \mathbf{1} \qquad et \qquad \lim_{t\to 0} \mathcal{F}('_t) = \quad ;$$

au sens de la topologie de $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n):$

Preuve On a $\lim_{t\to 0} '_t(x) = \lim_{t\to 0} '(tx) = '(0) = 1$ ainsi que $|'_t(x)| \leq \|'\|_\infty$ pour tous $t > 0$ et $x \in \mathbb{R}^n:$ Le théorème de convergence dominée de Lebesgue montre alors que $\lim_{t\to 0} \int_{\mathbb{R}^n} '_t(x) f(x)dx = \lim_{t\to 0} \int_{\mathbb{R}^n} f(x)dx$ pour toute $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ et ceci prouve que $\lim_{t\to 0} '_t = \mathbf{1}:$

Soit $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. Alors, on a

$$\begin{aligned} \langle \mathcal{F}('_t); f\rangle &= \int_{\mathbb{R}^n} t^{-n}\mathcal{F}(')(y/t) f(y)dy \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} \mathcal{F}(')(y) f(ty)dy: \end{aligned}$$

De nouveau, comme $\lim_{t\to 0} f(ty) = f(0)$ et $|f(ty)| \leq \|f\|_\infty$ pour tous $t > 0$ et $y \in \mathbb{R}^n;$ le théorème de convergence dominée de Lebesgue montre que

$$\lim_{t\to 0} \langle \mathcal{F}('_t); f\rangle = f(0) \int_{\mathbb{R}^n} \mathcal{F}(')(y)dy = f(0)\mathcal{F}(\mathcal{F}(')(0)$$

et ceci prouve que $\lim_{t\to 0} \mathcal{F}('_t) = \quad :\blacksquare$

Pour conclure la preuve du Théorème 2, on considère la gaussienne $\quad (x) = e^{-\pi\|x\|^2}:$ Il est bien connu que $\quad \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ et que $\mathcal{F}(\quad) = \quad :$ En particulier, on a $\mathcal{F}(\mathcal{F}(\quad)(0) = \quad (0) = 1:$ En prenant $' = \quad$ dans la Proposition 6, on voit que $\quad = 1:$ La continuité de $\mathcal{F}$ sur $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ (voir Corollaire 5) implique alors qu'on a bien $\mathcal{F}(\mathbf{1}) = \quad :$