Exemple d'un opérateur de convolution par une distribution: la transformation de Hilbert

Bachir Bekka

April 26, 2012

1 Introduction

Un opérateur intégral $K : L^2(\mathbb{R}^n) \to L^2(\mathbb{R}^n)$ (ou $K : L^p(\mathbb{R}^n) \to L^p(\mathbb{R}^n)$) est un opérateur du type $Kf(x) = \int_{\mathbb{R}^n} k(x,y)f(y)dy$, défini par une fonction ("noyau") $k(x,y)$ sur $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$. Une classe importante d'opérateurs intégraux est celle constituée par ceux qui commutent avec les translations par des vecteurs de $\mathbb{R}^n$, c-à-d ceux dont le noyau est de la forme $k(x,y) = \varphi(x-y)$ pour une fonction φ sur $\mathbb{R}^n$; si $\varphi \in L^1(\mathbb{R}^n)$, un tel opérateur est bien défini sur $L^2(\mathbb{R}^n)$ et est continu. Le cas où φ n'est pas intégrable est un cas particulièrement intéressant, donnant lieu à des opérateurs intégraux singuliers. La transformation de Hilbert en est le prototype.

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ une fonction dans $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ ou $L^1(\mathbb{R})$. On aimerait définir la convolution de f avec la fonction $x \mapsto 1/x$ par la formule habituelle $x \mapsto \int_{\mathbb{R}} \frac{f(x-t)}{t} dt$. Le problème est que, la fonction $x \mapsto 1/x$ n'étant pas localement intégrable, cette formule ne définit pas une distribution dans $\mathcal{S}'$. On peut néanmoins donner un sens à cette convolution en l'interprétant comme valeur principale.

Rappelons que la distribution tempérée $\mathrm{vp}(1/x)$ ("valeur principale" de $1/x$) est définie par $\langle \mathrm{vp}(1/x), \varphi \rangle = \lim_{0<\varepsilon\to 0} \int_{|y|>\varepsilon} \frac{\varphi(y)}{y} dy$ pour tout $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$.

Définition 1 Soit $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$; la *transformation de Hilbert* de f est le produit de convolution $Hf = \frac{1}{\pi}\mathrm{vp}(1/x) * f$.

Rappelons (voir Section 2) que, étant données une distribution $T \in \mathcal{S}'$ et une fonction à décroissance rapide $\psi \in \mathcal{S}$, on peut définir leur produit de convolution $T * \psi$ qui est une distribution donnée par une fonction C^∞ à croissance modérée. Ainsi Hf est la fonction $\mathbb{R} \to \mathbb{C}$ définie par

$$Hf(x) = \frac{1}{\pi} \lim_{0<\varepsilon\to 0} \int_{|y|>\varepsilon} \frac{f(x-y)}{y} dy = \frac{1}{\pi} \lim_{0<\varepsilon\to 0} \int_{|y-x|>\varepsilon} \frac{f(y)}{x-y} dy.$$

Une propriété remarquable de la transformation de Hilbert $H : \mathcal{S} \to \mathcal{S}'$ est qu'elle s'étend en un opérateur continu $L^p(\mathbb{R}) \to L^p(\mathbb{R})$ pour $p \in]1, \infty[$ (voir les références citées plus bas); nous ne traiterons ici que le cas hilbertien $p = 2$.

Théorème 2 *La transformation de Hilbert s'étend en une isométrie bijective* $H : L^2(\mathbb{R}) \to L^2(\mathbb{R})$.

Remarque 3 Il existe une généralisation de la transformée de Hilbert en dimension supérieure: les transformations de Riesz. Pour tout $j \in \{1, \ldots, n\}$ et $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, la transformée de Riesz $R_j f$ est la distribution définie par

$$R_j f = C_n \mathrm{vp}(x_j/|x|^{n+1}) * f \quad \text{avec} \quad C_n = \frac{\Gamma(\frac{n+1}{2})}{\pi^{\frac{n+1}{2}}}.$$

Nous ferons d'abord des rappels sur la convolution d'une distribution et d'une fonction; nous donnerons ensuite la preuve du Théorème 2. Enfin, nous évoquerons le lien qui existe entre la transformation de Hilbert et les valeurs au bord de fonctions holomorphes sur le demi-plan supérieur.

2 Quelques rappels sur le produit de convolution

Pour les rappels qui suivent, on pourra consulter le Chapitre 7 de l'ouvrage de W. Rudin : Functional Analysis, McGraw-Hill 1973.

Pour deux fonctions $\varphi, \psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ le produit de convolution $\varphi * \psi$, défini par $\varphi * \psi(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \varphi(x-y)\psi(y)dy$, est une fonction à décroissance rapide. Si on désigne par T_f la distribution définie par une fonction $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ (c-à-d $\langle T_f, g\rangle = \int_{\mathbb{R}^n} f(x)g(x)dx$, pour tout $g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$), on a alors, par Fubini, $\langle T_{\varphi*\psi}, f\rangle = \int_{\mathbb{R}^n} (\check{\psi} * f)(x)\varphi(x)dx = \langle T_\varphi, \check{\psi} * f\rangle$, avec $\check{\psi}(y) = \psi(-y)$. Pour $T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ et $\psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, ceci nous amène à définir le produit de convolution $T * \psi$ comme forme linéaire sur $\mathcal{S}$ par $\langle T * \psi, f\rangle = \langle T, \check{\psi} * f\rangle$ pour tout $f \in \mathcal{S}$.

Il y a une autre façon de définir le produit de convolution $T * \psi$: on remarque que, pour $\varphi, \psi \in \mathcal{S}$ et $x \in \mathbb{R}^n$, on a

$$\varphi * \psi(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \varphi(y)(\tau_x(\psi))(y)dy = \langle T_\varphi, \tau_x(\psi)\rangle$$

où $\tau_x(\psi)(y) = \psi(y-x)$. Pour $T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ et $\psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, on peut donc également définir $T*\psi$ comme étant la fonction f, dont la valeur en $x \in \mathbb{R}^N$ est $f(x) = \langle T, \tau_x(\psi)\rangle$. Il s'avère que les deux définitions fournissent le même résultat: la fonction f est C^∞ et f, ainsi que ses dérivées, est à croissance modérée; la distribution T_f coïncide avec la distribution $T*\psi$ introduite plus haut.

Nous noterons $\mathcal{F}(\varphi)$ la transformée de Fourier d'une fonction $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$:

$$\mathcal{F}(\varphi)(\xi) = \int_{\mathbb{R}^n} \varphi(x)e^{-2\pi i x\cdot\xi}dx, \qquad \forall \xi \in \mathbb{R}^n.$$

Nous rappelons que $\mathcal{F} : \mathcal{S} \to \mathcal{S}$ est un isomorphisme bicontinu tel que $\mathcal{F}(\varphi*\psi) = \mathcal{F}(\varphi)\mathcal{F}(\psi)$ pour tous $\varphi, \psi \in \mathcal{S}$. De plus, $\mathcal{F}$ s'étend en une isométrie $L^2(\mathbb{R}^n) \to L^2(\mathbb{R}^n)$ (Théorème de Plancherel) ainsi qu'en un isomorphisme bicontinu $\mathcal{F} : \mathcal{S}' \to \mathcal{S}'$ par la formule $\langle \mathcal{F}(T), \varphi\rangle = \langle T, \mathcal{F}(\varphi)\rangle$ pour tout $T \in \mathcal{S}'$ et $\varphi \in \mathcal{S}$.

Pour $T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ et $\psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, on a $\mathcal{F}(T*\psi) = \mathcal{F}(\psi)\mathcal{F}(T)$. (On rappelle que, pour $T \in \mathcal{S}'$ et $f \in \mathcal{S}$, le produit fT est la distribution tempérée définie par $\langle fT, \varphi\rangle = \langle T, f\varphi\rangle$ pour tout $\varphi \in \mathcal{S}$.)

3 La transformée de Hilbert sur $L^2(\mathbb{R})$

Soit $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$. Sa transformée de Hilbert $Hf = \frac{1}{\pi}\mathrm{vp}(1/x)*f$ est une fonction de classe C^∞ et, pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a

$$Hf(x) = \frac{1}{\pi}\lim_{0<\varepsilon\to 0}\int_{|y|>\varepsilon}\frac{f(x-y)}{y}dy = \frac{1}{\pi}\lim_{0<\varepsilon\to 0}\int_{|y-x|>\varepsilon}\frac{f(y)}{x-y}dy.$$

De plus, $\mathcal{F}(Hf) = \mathcal{F}(\mathrm{vp}(1/x))\mathcal{F}(f)$; nous allons déterminer $\mathcal{F}(\mathrm{vp}(1/x))$.

Lemme 4 $\mathcal{F}(\mathrm{vp}(1/x))$ *est la distribution donnée par la fonction bornée* $x \mapsto -i\,\pi\,\mathrm{signe}(x)$.

Preuve Il y a plusieurs méthodes pour calculer $\mathcal{F}(\mathrm{vp}(1/x))$; en voici une: pour $\varphi \in \mathcal{S}$, on a

$$\begin{aligned}
\langle \mathcal{F}(\mathrm{vp}(1/x)), \varphi \rangle = \langle \mathrm{vp}(1/x), \mathcal{F}(\varphi) \rangle &= \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{\varepsilon \leq |\xi|} \frac{\mathcal{F}(\varphi)(\xi)}{\xi} d\xi \\
&= \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{\varepsilon \leq |\xi| \leq 1/\varepsilon} \int_{\mathbb{R}} \varphi(x) e^{-2\pi i x \xi} dx \frac{d\xi}{\xi} \\
&= \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{\mathbb{R}} \varphi(x) \left(\int_{\varepsilon \leq |\xi| \leq 1/\varepsilon} e^{-2\pi i x \xi} \frac{d\xi}{\xi} \right) dx \\
&= \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{\mathbb{R}} \varphi(x) \left(\int_{\varepsilon \leq |\xi| \leq 1/\varepsilon} \frac{e^{-2\pi i x \xi} - e^{2\pi i x \xi}}{2} \frac{d\xi}{\xi} \right) dx \\
&= -i \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{\mathbb{R}} \varphi(x) \left(\int_{|\xi| \leq 1/\varepsilon} \frac{\sin 2\pi x \xi}{\xi} d\xi \right) dx,
\end{aligned}$$

où on a utilisé le changement de variable $\xi \mapsto -\xi$ dans l'avant dernière égalité. La fonction $g_\varepsilon : x \mapsto \varphi(x) \int_{|\xi| \leq 1/\varepsilon} \frac{\sin 2\pi x \xi}{\xi} d\xi$ est intégrable sur $\mathbb{R}$. De plus, on sait que $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin y}{y} dy = \pi$; avec le changement de variable $\xi \mapsto \eta = 2\pi x \xi$, il s'ensuit que

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \int_{|\xi| \leq 1/\varepsilon} \frac{\sin 2\pi x \xi}{\xi} d\xi = \pi \, \mathrm{signe}(x)$$

uniformément en x. En particulier, il existe une constante M telle que $|g_\varepsilon(x)| \leq M|\varphi(x)|$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. Par le théorème de convergence dominée, on a donc

$$\begin{aligned}
\lim_{\varepsilon \to 0} \int_{\mathbb{R}} \varphi(x) \left(\int_{|\xi| \leq 1/\varepsilon} \frac{\sin 2\pi x \xi}{\xi} d\xi \right) dx &= \int_{\mathbb{R}} \varphi(x) \lim_{\varepsilon \to 0} \left(\int_{|\xi| \leq 1/\varepsilon} \frac{\sin 2\pi x \xi}{\xi} d\xi \right) dx \\
&= \int_{\mathbb{R}} \varphi(x) \left(\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin 2\pi x \xi}{\xi} d\xi \right) dx \\
&= \pi \int_{\mathbb{R}} \varphi(x) \, \mathrm{signe}(x) dx. \blacksquare
\end{aligned}$$

Preuve du Théorème 2 Pour $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, on a, par Lemme 4, $\mathcal{F}(Hf) = \frac{1}{\pi} \mathcal{F}(\mathrm{vp}(1/x)) \mathcal{F}(f) = -i \, \mathrm{signe} \, \mathcal{F}(f)$. Par conséquent, $\mathcal{F}(Hf)$ est dans $L^2(\mathbb{R})$ et $\|\mathcal{F}(Hf)\|_2 = \|\mathcal{F}(f)\|_2$ Comme $\mathcal{F}$ est une isométrie sur $L^2(\mathbb{R})$, il s'ensuit que $Hf \in L^2(\mathbb{R})$ et que $\|Hf\|_2 = \|f\|_2$. L'espace $\mathcal{S}$ étant dense dans $L^2(\mathbb{R})$, l'application linéare H s'étend en une isométrie de $L^2(\mathbb{R})$. Cette application est une bijection, car la formule $\mathcal{F}(Hf) = -i$ signe$\mathcal{F}(f)$ montre que $H^2 = -I$. $\blacksquare$

Exercice 5 (i) Supposons que f est seulement C^1 par morceaux et intégrable sur $\mathbb{R}$; alors $Hf(x)$ est défini en tout point x appartenant à l'intérieur de tout intervalle sur lequel f est C^1.
(ii) Montrer que la transformée de Hilbert de la fonction indicatrice $\mathbf{1}_{[a,b]}$ d'un intervalle $[a, b]$ est

$$H(\mathbf{1}_{[a,b]})(x) = \frac{1}{\pi} \log \frac{|x-a|}{|x-b|}, \qquad \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{a, b\}.$$

On remarquera que $H(\mathbf{1}_{[a,b]})$ n'est pas intégrable sur $\mathbb{R}$ car $Hf(x) \cong (b-a)\pi/x$ pour $x \to \infty$; ceci montre que H ne s'étend pas en un opérateur $L^1(\mathbb{R}) \to L^1(\mathbb{R})$, à la différence de ce qui se passe pour $L^p(\mathbb{R})$ dans le cas $1 < p < \infty$ (comme mentionné dans l'introduction).

4 Transformation de Hilbert et fonctions holomorphes

Soit $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ à valeurs réelles. Une fonction u est solution du problème de Dirichlet dans le demi-plan supérieur $P = \mathbb{R}\times]0, \infty[$ si u est C^2 sur P et si

$$\Delta u(x, y) = 0 \quad \text{dans} \quad P \quad \text{et} \quad \lim_{y \to 0} u(x, y) = f(x) \text{ pour tout } x \in \mathbb{R}.$$

Ce problème admet comme solution $u(x, y) = (P_y * f)(x)$, où P_y est le *noyau de Poisson* défini par $P_y(x) = \frac{1}{\pi}\frac{y}{x^2+y^2}$ pour $x \in \mathbb{R}$ et $y > 0$.

L'intégrale de Cauchy de f est définie sur P par $F_f(z) = \frac{i}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{f(t)}{z-t} dt$. La fonction F_f est holomorphe dans P, sa partie réelle est

$$u_f(x, y) = \operatorname{Re} F_f(x + iy) = \frac{y}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{f(x-t)}{t^2 + y^2} dt = (P_y * f)(x)$$

et sa partie imaginaire est

$$v_f(x, y) = \operatorname{Im} F_f(x + iy) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{f(x-t)t}{t^2 + y^2} dt = (Q_y * f)(x),$$

avec $Q_y(x) = \frac{1}{\pi}\frac{x}{x^2+y^2}$. Comme $F_f = u_f + iv_f$, les fonctions u et v sont des fonctions harmoniques conjuguées. Comme évoqué plus haut, on a $\lim_{y\to 0} u_f(x, y) = f(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. Concernant v_f, on a le résultat suivant:

Proposition 6 *On a* $\lim_{y\to 0} v_f(x, y) = Hf(x)$ *pour tout* $x \in \mathbb{R}$.

Preuve Fixons $x \in \mathbb{R}$. On a, pour tout $y > 0$.

$$
\begin{aligned}
& v_f(x,y) - \frac{1}{\pi}\int_{y\leq |t|} \frac{f(x-t)}{t}dt = \\
& = v_f(x,y) + \frac{1}{\pi}\int_y^{\infty} \frac{f(x+t)-f(x-t)}{t}dt \\
& = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{f(x-t)t}{t^2+y^2}dt + \frac{1}{\pi}\int_y^{\infty} \frac{f(x+t)-f(x-t)}{t}dt \\
& = -\frac{1}{\pi}\int_0^{+\infty} \frac{(f(x+t)-f(x-t))t}{t^2+y^2}dt + \frac{1}{\pi}\int_y^{\infty} \frac{f(x+t)-f(x-t)}{t}dt \\
& = -\frac{1}{\pi}\int_0^{y} \frac{t}{t^2+y^2}(f(x+t)-f(x-t))dt + \frac{y^2}{\pi}\int_y^{\infty} \frac{f(x+t)-f(x-t)}{t(t^2+y^2)}dt \\
& = -\frac{1}{\pi}\int_0^{y} \frac{t}{t^2+y^2}(f(x+t)-f(x-t))dt + \frac{y^2}{\pi}\int_y^{1} \frac{f(x+t)-f(x-t)}{t(t^2+y^2)}dt + \\
& + \frac{y^2}{\pi}\int_1^{\infty} \frac{f(x+t)-f(x-t)}{t(t^2+y^2)}dt \\
& = I_1 + I_2 + I_3.
\end{aligned}
$$

Quand $y \to 0$, on a

$$
|I_3| \leq \frac{y^2}{\pi}\int_1^{\infty} \frac{|f(x+t)|+|f(x-t)|}{t^3}dt \leq \frac{2y^2\|f\|_\infty}{\pi}\int_1^{\infty}\frac{1}{t^3}dt = O(y^2);
$$

comme $\frac{t}{t^2+y^2} \leq 1/y$ pour $0 \leq t \leq y$, on a

$$
|I_1| \leq \frac{1}{\pi y}\int_0^{y} |f(x+t)-f(x-t)|dt \leq \frac{1}{\pi}\sup_{t\in[0,y]} |f(x+t)-f(x-t)| = o(1);
$$

comme la dérivée de f est bornée, il existe $C > 0$ tel que $|f(x+t)-f(x-t)| \leq Ct$ pour tout $t \in \mathbb{R}$ et on a alors

$$
|I_2| \leq \frac{Cy^2}{\pi}\int_y^{1} \frac{dt}{(t^2+y^2)} = \frac{Cy^2}{\pi}[\frac{1}{y}\arctan(t/y)]_y^1 = \frac{Cy}{\pi}(\arctan 1 - \arctan(1/y)) = o(1).
$$

En conclusion, $\lim_{y\to 0} v_f(x,y) - \frac{1}{\pi}\int_{y\leq|t|}\frac{f(x-t)}{t}dt = 0.$■

Références Pour aller plus loin, voici quelques excellents ouvrages où est traitée la transformation de Hilbert ainsi que les transformations de Riesz, dans le cadre des espaces L^p :

-L.Grafakos : Classical Fourier analysis, Springer (2008)
-E.M. Stein, G. Weiss : Introduction of Fourier analysis on Euclidean spaces, Princeton Univ. Press (1971)