SÉRIES DE FOURIER ABSOLUMENT CONVERGENTES THÉORÈME DE WIENER

Hubert Hennion

Théorème

Soit f une fonction continue 2π-périodique ayant une série de Fourier absolument convergente. Alors, si f ne s'annule pas, la série de Fourier de la fonction $1/f$ est absolument convergente.

Il y a de multiples manières de prouver ce théorème dû à Norbert Wiener. Le but de cette note est d'exposer la preuve élémentaire qu'en a donné D. J. Newman[1]. Cette preuve utilise des résultats sur les séries de Fourier absolument (ou normalement) convergentes qui font partie de la théorie élémentaire et ne sauraient être omis dans une leçon sur le sujet. Dans une première partie **A**, on énonce ces résultats sous une forme adaptée aux besoins ultérieurs. Ils sont accompagnés de brèves démonstrations destinées à rafraichir la mémoire du lecteur, qui cependant doit pouvoir les retrouver dans la littérature en consultant, par exemple, Z.Q[2], Théo III.6, p. 83. La partie **B** est consacrée à la preuve du Théorème de Wiener. On y verra comment l'introduction d'une algèbre de Banach adaptée permet une démonstration simple.

Comme le lecteur pourra s'en convaincre le théorème et sa preuve peuvent figurer dans les leçons traitant de sujets tels que : séries de Fourier, espaces de fonctions, espaces complets.

Notations et rappel

On désigne par $L^1(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})$ (resp. $\mathcal{C}(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})$) l'espace des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$ mesurables, 2π-périodiques, intégrables sur $[-\pi,+\pi]$ (resp. continues, 2π-périodiques). L'espace $\mathcal{C}(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})$ est muni de la norme uniforme $\|\cdot\|_u$.

Les coefficients de Fourier d'une fonction $f\in L^1(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})$ sont notés $c_n(f)$, $n\in\mathbb{Z}$, $c_n(f)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} f(x)e^{-inx}dx$.

On rappelle que, pour une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ de nombres complexes, le symbole $\sum_{n\in\mathbb{Z}} u_n$ désigne la limite lorsqu'elle existe des sommmes partielles $\sum_{n=-M}^{+N} u_n$ lorsque les entiers M,N tendent (indépendamment) vers $+\infty$.

A. SÉRIES DE FOURIER ABSOLUMENT CONVERGENTES

Proposition A.1

(i) Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{Z}}\in\mathbb{C}^{\mathbb{Z}}$ telle que $\sum_{n\in\mathbb{Z}}|u_n|<+\infty$. La formule

$$\forall x\in\mathbb{R},\quad S(x)=\sum_{n\in\mathbb{Z}} u_n e^{inx}$$

définit une fonction $S\in\mathcal{C}(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})$ telle que, pour tout $n\in\mathbb{Z}$, $c_n(S)=u_n$.

(ii) Soit $f\in L^1(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})$ telle que $\sum_{n\in\mathbb{Z}}|c_n(f)|<+\infty$. On a

(1) D. J. Newman, A Simple proof of Wiener's $1/f$ Theorem, Proc. Amer. Math. Soc. Vol 48, 1, (1975).

(2) Cl. Zuily, H. Queffélec, Eléments d'Analyse pour l'Agrégation.

$$f(x) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n(f)e^{inx} \quad p.p.$$

En particulier, f est égale presque partout à une fonction continue. [3]

Preuve

(i) Puisque $\sup_{x\in\mathbb{R}} |u_n e^{inx}| = |u_n|$, la série $\sum_{n\in\mathbb{Z}} u_n e^{inx}$ converge normalement, donc uniformément sur $\mathbb{R}$. La fonction S est donc définie, continue et évidemment 2π-périodique. La convergence uniforme mentionée permet le calcul des coefficients de Fourier de S par intégration termes à termes dans la série, d'où $c_n(S) = u_n$, $n \in \mathbb{Z}$.

(ii) Posons, pour $x \in \mathbb{R}$, $S(x) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n(f)e^{inx}$. D'après *(i)*, les fonctions S et f ont même coefficients de Fourier, elles coincident donc en dehors d'un ensemble de mesure nulle. []

Définition

On désigne par A l'espace des fonctions de $\mathcal{C}(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})$ ayant une série de Fourier absolument convergente (i.e. $\sum_{n\in\mathbb{Z}} |c_n(f)| < +\infty$)

On peut, de manière équivalente, parler de séries de Fourier normalement convergentes. La dernière assertion de la Proposition A.1 montre que A est l'espace convenable pour l'étude des séries de Fourier absolument convergentes. On énonce maintenant une condition suffisante pour l'appartenance à A (cf. Z.Q. Théo III.3, v).

Proposition A.2

Soit $f \in \mathcal{C}(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})$, $\mathcal{C}^1$ par morceaux. Alors $f \in A$, plus précisément on a l'inégalité

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} |c_n(f)| \leq |c_0(f)| + 2\|f'\|_2$$

avec $\|f'\|_2^2 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} |f'(x)|^2 dx$, et, si f est $\mathcal{C}^1$, on peut écrire

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} |c_n(f)| \leq \|f\|_u + 2\|f'\|_u.$$

Preuve

On sait (Z.Q. Prop. I.5, vii) que, si f vérifie les hypothèses de l'énoncé, on a, pour tout $n \in \mathbb{Z}$, $c_n(f') = in\, c_n(f)$.

Pour $M, N \in \mathbb{N}^*$, on peut écrire, en utilisant l'inégalité de Schwarz, puis l'égalité de Bessel,

$$\sum_{n=-M}^{+N} |c_n(f)| \leq |c_0(f)| + \Big(\sum_{n\neq 0, n=-M,}^{+N} \frac{1}{n^2}\Big)^{1/2} \Big(\sum_{n=-M}^{+N} |c_n(f')|^2\Big)^{1/2}$$

$$\leq |c_0(f)| + \Big(\frac{\pi^2}{3}\Big)^{1/2} \Big(\sum_{n\in\mathbb{Z}} |c_n(f')|^2\Big)^{1/2} \leq |c_0(f)| + 2\|f'\|_2 < +\infty.$$

De là, la convergence de la série et la borne de sa somme. La seconde inégalité est immédiate. []

[3] On notera la spécificité de la convergence énoncée. En effet l'étude de la convergence de la série de Fourier d'une fonction f est celle des sommes partielles "symétriques" $\sum_{n=-N}^{+N} c_n(f)e^{inx}$.

B. PREUVE DU THÉORÈME DE WIENER

B.1. Rappel : l'algèbre de Banach ℓ^1.

L'espace $\ell^1 = \ell^1_{\mathbb{C}}(\mathbb{Z}) = \{u : u = (u_n)_{n\in\mathbb{Z}} \in \mathbb{C}^{\mathbb{Z}}, \sum_{n\in\mathbb{Z}} |u_n| < +\infty\}$ muni de sa norme usuelle $|||\cdot|||_1$, $|||u|||_1 = \sum_{n\in\mathbb{Z}} |u_n|$, est un espace de Banach.

Si $u = (u_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ et $v = (v_n)_{n\in\mathbb{Z}} \in \ell^1$, on définit la convolution $u \star v \in \ell^1$ par

$$\forall n \in \mathbb{Z}, \quad (u \star v)_n = \sum_{k\in\mathbb{Z}} u_k v_{n-k},$$

et l'on a l'inégalité $|||u \star v|||_1 \le |||u|||_1 |||u||_1$, de sorte que $(\ell^1, \star, |||\cdot|||_1)$ est une algèbre de Banach.

(On établit simultanément le fait que le produit de convolution est défini, son appartenance à ℓ^1, et l'inégalité des normes en considérant l'égalité dans $\mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$,

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} \sum_{k\in\mathbb{Z}} |u_k v_{n-k}| = \sum_{k\in\mathbb{Z}} |u_k| \sum_{n\in\mathbb{Z}} |v_n|.)$$

B.2. Structure d'algèbre de Banach sur A induite par ℓ^1.

Lemme B.1

Pour $u = (u_n)_{n\in\mathbb{Z}} \in \ell^1$, on définit la fonction $\Phi(u)$ par

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \Phi(u)(x) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} u_n e^{inx}.$$

Alors

(i) Φ est un isomorphisme de l'algèbre $(\ell^1, \star)$ sur l'algèbre $(A, \times)$,

(ii) posons, pour $f \in A$, $\|f\|_A = \sum_{n\in\mathbb{Z}} |c_n(f)|$, $(A, \times, \|\cdot\|_A)$ est une algèbre de Banach, (4)

(ii) pour $f \in A$, $\|f\|_u \le \|f\|_A$. (5)

Preuve

(i) Pour $f \in A$, posons $\Psi(f) = \big(c_n(f)\big)_{n\in\mathbb{Z}} \in \ell^1$. Les assertions *(i)*, *(ii)* de la Proposition A.1 montrent respectivement que $\Psi \circ \Phi = I_{\ell^1}$ et que $\Phi \circ \Psi = I_A$. Φ est par conséquent une bijection, évidemment linéaire, de ℓ^1 sur A.

Soient $u = (u_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ et $v = (v_n)_{n\in\mathbb{Z}} \in \ell^1$. Pour $x \in \mathbb{R}$,

$$\Phi(u \star v)(x) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \big(\sum_{k\in\mathbb{Z}} u_k v_{n-k}\big) e^{inx} = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \sum_{k\in\mathbb{Z}} u_k e^{ikx} v_{n-k} e^{i(n-k)x}.$$

Comme $\sum_{n\in\mathbb{Z}} \sum_{k\in\mathbb{Z}} |u_k e^{ikx} v_{n-k} e^{i(n-k)x}| = \sum_{k\in\mathbb{Z}} |u_k| \sum_{n\in\mathbb{Z}} |v_n| < +\infty$, il est possible de permuter l'ordre des sommations, il vient

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \Phi(u \star v)(x) = \Phi(u)(x)\,\Phi(v)(x),$$

soit

$$\Phi(u \star v) = \Phi(u)\,\Phi(v).$$

Φ est donc un isomorphisme de l'algèbre $(\ell^1, \star)$ sur l'algèbre $(A, \times)$.

(ii) Soit $f \in A$, $\|f\|_A = |||\Phi^{-1}(f)|||_1$. On voit que $\|\cdot\|_A$ est une norme sur A et que Φ est maintenant un isomorphisme isométrique. Il en résulte que $(A, \times, \|\cdot\|_A)$ comme $(\ell^1, \star, |||\cdot|||_1)$ est une algèbre de Banach.

(iii) Immédiat. []

---

(4) Muni de la norme $\|\cdot\|_u$, l'espace A n'est pas complet. En effet les polynomes trigonométriques sont des éléments de A, le théoréme de Fejer assure que toute fonction de $\mathcal{C}(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})$ est limite uniforme de polynomes trigonométriques, de sorte que $\overline{A}^u = \mathcal{C}(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})$.

(5) En conséquence, dans A, la convergence au sens $\|\cdot\|_A$ implique la convergence uniforme.

Dans le cadre introduit ci-dessus, la conclusion du théorème de Wiener est "f est inversible dans A". [6]

B.3. Inversibilité dans A.

D'après la Proposition A.1, une condition suffisante pour qu'une fonction g soit dans A et soit inversible dans A est qu'elle soit dans $\mathcal{C}^1(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})$ et ne s'annule pas. En effet, dans ce cas $\frac{1}{g}$ est aussi dans $\mathcal{C}^1(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})$.

Par ailleurs, on sait que, dans une algèbre de Banach A, l'ensemble des éléments inversibles est un ouvert. Plus précisément : soit g un élément inversible de A et $f \in A$, l'écriture

$$f = g - (g - f) = g\big(1 - g^{-1}(g - f)\big) = g\Big(1 - \frac{g - f}{g}\Big),$$

montre que f est inversible dans A dès que la série

$$\sum_{n\geq 0}\Big(\frac{g-f}{g}\Big)^n$$

converge dans A. Comme A **est complet**, une condition suffisante pour la convergence de la série dans A est sa convergence absolue, soit

$$\sum_{n\geq 0} u_n < +\infty, \qquad \text{avec} \qquad u_n = \Big\|\Big(\frac{g-f}{g}\Big)^n\Big\|_A.$$ [7]

La preuve consiste à approcher au sens de A la fonction f donnée par une fonction g inversible convenable de façon à assurer la convergence de la série ci-dessus.

B.4 *Fin de la preuve*

Il est commode de faire la réduction suivante. Soit f vérifiant les hypothèses du théorème. De la périodicité et la continuité de f, et de la compacité de $[-\pi, +\pi]$, on déduit que le nombre $m = \inf\{|f(x)| : x \in \mathbb{R}\}$ est strictement positif. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $|(m^{-1}f)(x)| \geq 1$. Comme A est stable par homothétie, on voit qu'une forme équivalente du théorème est

$$(f \in A, \quad \forall x \in \mathbb{R}, |f(x)| \geq 1) \Rightarrow (1/f \in A).$$

Soit $S_n(f)$ la somme partielle de rang $n \geq 0$ de la série de Fourier de f. $S_n(f) \in A$ et $\|S_n(f) - f\|_A = \sum_{k\in\mathbb{Z},|k|>n} |c_k(f)|$, de sorte que $\lim_{n\to\infty} \|S_n(f) - f\|_A = 0$. Choisissons n_0 tel que $\|S_{n_0}(f) - f\|_A \leq 1/3$ et désignons plus simplement par $g \in A$ le polynome trigonométrique $S_{n_0}(f)$. On a donc

$$g \in A \qquad \text{et} \qquad \|g - f\|_A \leq 1/3.$$

Du Lemme B.1, il vient $\|g - f\|_u \leq 1/3$, d'où

$$\forall x \in \mathbb{R}, \;\; |g(x)| \geq |f(x)| - |g(x) - f(x)| \geq 1 - 1/3 = 2/3.$$

Il en résulte que $g \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})$ ne s'annule pas donc que

---

(6) La condition $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) \neq 0$ assure l'inversibilité de f dans l'algèbre $\big(\mathcal{C}(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}), \times, \|\cdot\|_u\big)$.

(7) Cette convergence est évidemment assurée lorsque $\|\frac{g-f}{g}\|_A < 1$, mais aussi plus généralement, comme ici, lorsque $\limsup_n \|(\frac{g-f}{g})^n\|_A^{1/n} < 1$.

$$\frac{1}{g} \in A \qquad \text{avec} \qquad \Big\|\frac{1}{g}\Big\|_u \leq 3/2.$$

En utilisant la dernière assertion de la Proposition A.2, il vient

$$\Big\|\frac{1}{g^n}\Big\|_A \leq \Big\|\frac{1}{g^n}\Big\|_u + 2\Big\|\frac{-ng'}{g^{n+1}}\Big\|_u \leq \Big\|\frac{1}{g}\Big\|_u^n \big(1 + 2n\|g'\|_u \Big\|\frac{1}{g}\Big\|_u\big) \leq (3/2)^n \big(1 + 3n\|g'\|_u\big).$$

La propriété de norme d'algèbre et l'inégalité $\|f-g\|_A \leq 1/3$ donnent

$$u_n \leq \Big\|\frac{1}{g^n}\Big\|_A \|f-g\|_A^n \leq (1/2)^n \big(1 + 3n\|g'\|_u\big).$$

Par conséquent $\sum_{n\geq 0} u_n < +\infty$. Q.E.D.