

SUR LES TRANSFORMÉES DE FOURIER ET DE LAPLACE

Les exercices ci-dessous constituent un entraînement à l'épreuve écrite d'analyse et probabilités. Ils peuvent également servir d'illustrations/applications pour les leçons :

- Espaces de fonctions. Exemples et applications.
 - Espaces de Hilbert. Bases hilbertiennes. Exemples et applications.
 - Espaces L^p pour $1 \leq p \leq +\infty$.
 - Fonctions définies par une intégrale dép. d'un paramètre. Exemples et applications. (I)
 - Transformation de Fourier, produit de convolution. Applications. (I)
 - Utilisation en proba. de la transfo. de Fourier ou de Laplace et du produit de convolution.
-

Transformée de Fourier et résolution d'EDP

Pour des rappels de bases concernant la notion de transformée de Fourier, on pourra par exemple consulter les ouvrages [Rud95, Laa01].

Exercice 1 *Résolution de l'équation de la chaleur ([Laa01] p. 264)*

On souhaite résoudre l'équation de la chaleur :

$$\begin{cases} \partial_t u(t, x) = \frac{1}{2} \partial_{xx}^2 u(t, x) & \text{pour } x \in \mathbb{R} \text{ et } t > 0, \\ u(0, x) = u_0(x) & \text{pour } x \in \mathbb{R}, \end{cases} \quad (1)$$

où u_0 est une fonction intégrable donnée. On va chercher à résoudre l'équation en supposant que "tout est permis" puis on contrôlera *a posteriori* que tous les calculs sont licites. On suppose ainsi qu'il existe une fonction u solution de (1) telle que, pour tout $t > 0$ fixé,

$$\int_{\mathbb{R}} |u(t, x)| dx < +\infty, \quad \int_{\mathbb{R}} \left| \frac{\partial u}{\partial t}(t, x) \right| dx < +\infty, \quad \int_{\mathbb{R}} \left| \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t, x) \right| dx < +\infty.$$

On suppose de plus que pour tout $t > 0$, on a

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{\partial u}{\partial t}(t, x) e^{-itx} dx = \frac{\partial}{\partial t} \int_{\mathbb{R}} u(t, x) e^{-itx} dx.$$

Considérons alors sa transformée de Fourier (en x) :

$$\hat{u}(t, y) := \int_{\mathbb{R}} u(t, x) e^{-ixy} \frac{dx}{\sqrt{2\pi}}.$$

1. Montrer que $\widehat{\partial_x u}(y) = iy\hat{u}(y)$ et $\widehat{\partial_{xx}^2 u}(y) = -y^2\hat{u}(y)$.
2. Montrer que, pour tout $y \in \mathbb{R}$, la fonction $t \mapsto \hat{u}(t, y)$ est solution de

$$\partial_t \hat{u}(t, y) = -\frac{1}{2} y^2 \hat{u}(t, y).$$

3. En déduire que

$$\forall t > 0, \forall y \in \mathbb{R}, \quad \hat{u}(t, y) = \hat{u}_0(y)e^{-y^2 t/2}.$$

4. Calculer la transformée de Fourier de la fonction $p_t(x) = e^{-x^2/(2t)}/\sqrt{t}$. On peut se souvenir que si Y suit la loi $\mathcal{N}(0, 1)$, alors $\mathbb{E}(e^{itY}) = e^{t^2/2}$.

5. En déduire que $\forall t > 0, x \in \mathbb{R}$:

$$u(t, x) = u_0 * p_t(x)/\sqrt{2\pi} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int u_0(z)p_t(z-x) dx = \mathbb{E}(u_0(x + \sqrt{t}Y)),$$

où Y suit la loi $\mathcal{N}(0, 1)$.

6. Vérifier que la solution trouvée u satisfait toutes les hypothèses qui précèdent la première question.

Exercice 2 Résolution de l'équation des cordes vibrantes ([Laa01] p. 267)

On considère l'équation des cordes vibrantes :

$$\begin{cases} \partial_{tt}^2 u(t, x) - a^2 \partial_{xx}^2 u(t, x) = 0 & \text{pour } x \in \mathbb{R} \text{ et } t > 0, \\ u(0, x) = f(x) & \text{pour } x \in \mathbb{R}, \\ \partial_t u(0, x) = g(x) & \text{pour } x \in \mathbb{R}. \end{cases} \quad (2)$$

On suppose d'une part que $f \in C^2(\mathbb{R}) \cap \mathbb{L}^1(\mathbb{R})$ et que f' et f'' sont intégrables, et d'autre part que $g \in C^1(\mathbb{R}) \cap \mathbb{L}^1(\mathbb{R})$ et que g' est intégrable. En suivant la même méthode que dans l'exercice précédent, exhiber une solution $u(t, x)$ du système ci-dessus telle que u et ses deux premières dérivées par rapport aux variables t et x soient intégrables.

Transformée de Fourier et principe d'incertitude

Exercice 3 L'inégalité de Heisenberg, [Laa01]

On se propose de montrer (en partie) le résultat suivant qui a une certaine importance, voire une importance certaine en mécanique quantique...

Théorème 1 Soit $f \in \mathbb{L}^2 := \mathbb{L}^2_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}, dx)$, $f \neq 0$, telle que $xf(x) \in \mathbb{L}^2$ et $\xi \hat{f}(\xi) \in \mathbb{L}^2$. On pose

$$\bar{x}_f := \frac{1}{\|f\|_2^2} \int_{\mathbb{R}} x|f|^2(x)dx, \quad \bar{\xi}_f := \frac{1}{\|\hat{f}\|_2^2} \int_{\mathbb{R}} \xi|\hat{f}|^2(\xi)d\xi,$$

et

$$\Delta_f := \left(\frac{1}{\|f\|_2^2} \int_{\mathbb{R}} (x - \bar{x}_f)^2 |f|^2(x)dx \right)^{1/2}, \quad \Delta_{\hat{f}} := \left(\frac{1}{\|\hat{f}\|_2^2} \int_{\mathbb{R}} (\xi - \bar{\xi}_f)^2 |\hat{f}|^2(\xi)d\xi \right)^{1/2}.$$

Alors

$$\Delta_f \Delta_{\hat{f}} \geq \frac{1}{2}, \quad (3)$$

avec égalité si et seulement il existe $\phi, m \in \mathbb{R}, \sigma \in \mathbb{R}^*, \alpha \in \mathbb{C}^*$ tel que

$$f(x) = \alpha e^{i\phi x} e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}.$$

- Déterminer $\bar{x}_g, \bar{\xi}_g, \Delta_g, \Delta_{\hat{g}}$ en fonction des quantités correspondantes pour f lorsque
 - $g = \lambda f$, avec $\lambda \in \mathbb{C}^*$;
 - $g(x) = f(\lambda x)$, avec $\lambda \in \mathbb{R}^*$;
 - $g(x) = \tau_h f$, avec $h \in \mathbb{R}^*$;
 - $g(x) = e^{i\phi x} f(x)$, avec $\phi \in \mathbb{R}$.
- Montrer que pour obtenir l'inégalité (3), il suffit de montrer que pour toute fonction f satisfaisant aux hypothèses, on a :

$$\|xf\|_2^2 \|\xi \hat{f}\|_2^2 \geq \frac{1}{4} \|f\|_2^2 \|\hat{f}\|_2^2. \quad (4)$$

Indication : on pourra regarder $\tilde{f} = e^{i\phi x} \tau_h f$ pour ϕ et h bien choisis.

- En intégrant par parties, montrer que l'inégalité (4) est vraie pour toute fonction f de l'espace de Schwartz \mathcal{S} .

Indication : on pourra dériver $f\bar{f}$, intégrer 1, et utiliser l'inégalité de Cauchy-Schwarz.

Le cas général où $f \in \mathbb{L}^2$ peut être obtenu en décomposant f sur une base hilbertienne bien choisie, par exemple la base des polynômes d'Hermite (voir exercice 10).

Exercice 4 Une inégalité d'incertitude récente (J. Bourgain, 2007)

Dans cet exercice, on définit la transformée de Fourier via la formule :

$$\hat{f}(\xi) = \int_{\mathbb{R}} f(x) e^{2\pi i x \xi} dx.$$

- Réécrire la transformée de Fourier d'une gaussienne et la formule d'inversion avec cette convention.

Soient f et \hat{f} deux fonctions dans $\mathbb{L}^1(\mathbb{R})$ telles que

- \hat{f} est la transformée de Fourier de f ,
- f et \hat{f} sont paires et réelles,
- $f(x) \geq 0$ pour $|x| \geq a > 0$ et $f(0) \leq 0$,
- $\hat{f}(\xi) \geq 0$ pour $|\xi| \geq \hat{a} > 0$ et $\hat{f}(0) \leq 0$.

Il s'agit de montrer que dans ces conditions, le produit $a\hat{a}$ est minoré par une constante absolue strictement positive.

- Pourquoi la condition b . est-elle contenue dans les conditions c . et d . ?
- Montrer que l'on peut supposer que $a = \hat{a}$ et que l'on peut se limiter aux fonction f qui sont égales à leur transformées de Fourier.
Indication : on pourra considérer $g = f + \hat{f}$.
- Montrer que l'on peut supposer que $\|f\|_{\mathbb{L}^1} = 1$ et $f(0) = 0$.
Indication : on peut toujours ajouter une gaussienne, laquelle ?
- Sous ces conditions, que vaut $\int_{\mathbb{R}} f(x) dx$? Montrer qu'alors $\int f^+ = \int f^- = 1/2$.
- En déduire que $\int_{|x|>a} |f| \leq 1/2$ et $\int_{|x|<a} |f| \geq 1/2$.
- Montrer que $\sup |f| \leq 1$, en déduire une minoration de a et conclure.
- On peut poser le même problème dans \mathbb{R}^n . Établir une minoration de a dépendant de n en suivant la même méthode.

La transformée de Laplace d'une mesure

Pour des rappels de base concernant la notion de transformée de Laplace, on pourra se référer par exemple à [DCD82]. Soit μ une mesure de probabilité sur \mathbb{R} muni de sa tribu borélienne. On lui associe sa transformée de Laplace L définie pour $t \in \mathbb{R}$ par :

$$L(t) := \int_{\mathbb{R}^d} e^{tx} \mu(dx).$$

Exercice 5 Transformées de Laplace usuelles

Déterminer L lorsque μ est

1. la mesure gaussienne $\mathcal{N}(0, 1)$ de densité

$$x \mapsto \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right),$$

2. la mesure gaussienne $\mathcal{N}(m, \sigma^2)$ de densité

$$x \mapsto \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left(-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}\right),$$

3. la mesure exponentielle de densité

$$x \mapsto \lambda e^{-\lambda x} \mathbf{1}_{\{x>0\}},$$

4. la mesure de Cauchy de densité

$$x \mapsto \frac{1}{\pi} \frac{1}{1+x^2},$$

5. la mesure de Poisson

$$\mu = \sum_{k=0}^{\infty} e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!} \delta_k,$$

6. la mesure binomiale

$$\mu = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \delta_k.$$

Exercice 6 Quelques propriétés de la transformée de Laplace

Voici quelques propriétés classiques de la transformée de Laplace L .

1. Montrer que L est convexe. Que dire de son domaine de définition ?
2. Quel lien existe-t-il entre la régularité de L en 0 et les propriétés de μ ?
3. Montrer que L est log-convexe (*i.e.* $\log L$ est une fonction convexe).
4. Que dire de la transformée de Laplace de $\mu * \nu$?

Exercice 7 Inégalité de Chernov

Soit $(X_n)_{n \geq 1}$ une suite de variables aléatoires centrées, indépendantes et identiquement distribuées de loi μ et de transformée de Laplace L définie sur intervalle d'intérieur non vide.

1. Montrer que, pour tout $r \geq 0$,

$$\mathbb{P}\left(\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n X_k \geq r\right) \leq \exp\left(-n \sup_{\lambda > 0} (r\lambda - \log L(\lambda))\right).$$

2. Que donne cette majoration pour la mesure gaussienne ? la mesure exponentielle ? la loi de Poisson ?

Autour du semi-groupe d'Ornstein-Uhlenbeck

Tout ce qui concerne le semi-groupe d'Ornstein-Uhlenbeck se trouve dans les dix premières pages de [Bak94]. Soit \mathcal{A} l'ensemble des fonctions de classe $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ à dérivées à croissance lente. Une fonction f est dite à croissance lente s'il existe un polynôme P tel que $|f| \leq P$. Dans toute la section, les fonctions considérées seront supposées appartenir à l'ensemble \mathcal{A} .

Définition 1 *Le semi-groupe d'Ornstein-Uhlenbeck sur \mathbb{R} est la famille $(N_t)_{t \geq 0}$ d'opérateurs agissant sur les fonctions f de \mathcal{A} par :*

$$N_t(f)(x) \stackrel{\text{déf.}}{=} \int_{\mathbb{R}} f\left(e^{-t}x + \sqrt{1 - e^{-2t}}y\right) \gamma(dy),$$

où γ désigne la mesure gaussienne standard sur \mathbb{R} :

$$\gamma(dy) = e^{-y^2/2} \frac{dy}{\sqrt{2\pi}}.$$

Pour simplifier les expressions, on pourra poser

$$c_t \stackrel{\text{déf.}}{=} e^{-t} \quad \text{et} \quad d_t \stackrel{\text{déf.}}{=} \sqrt{1 - e^{-2t}}.$$

Exercice 8 *Propriété de semi-groupe et générateur infinitésimal*

Montrer que la famille $(N_t)_{t \geq 0}$ vérifie les propriétés suivantes :

1. pour tout $t \geq 0$ et toute fonction $f \in \mathcal{A}$, $N_t(f) \in \mathcal{A}$,
2. pour tout $t \geq 0$, $N_t \mathbf{1}(x) = 1$,
3. pour tous $t \geq 0$ et $f \in \mathcal{A}$, $f \geq 0$ entraîne $N_t f \geq 0$,
4. pour toute fonction $f \in \mathcal{A}$, $N_0 f = f$,
5. pour tous $s, t \geq 0$ et $f \in \mathcal{A}$, $N_t N_s f(x) = N_{t+s} f(x)$.
6. Montrer que

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} (N_t f - f)(x) = f''(x) - x f'(x).$$

L'opérateur A défini sur \mathcal{A} par

$$A f(x) := f''(x) - x f'(x)$$

sera appelé générateur infinitésimal du semi-groupe d'Ornstein-Uhlenbeck.

7. Montrer que

$$\partial_t N_t f = A(N_t f) = N_t(A f).$$

Remarque 1 *Cette propriété est très importante car elle montre en particulier que, pour f_0 dans \mathcal{A} , la fonction f définie sur $[0, +\infty[\times \mathbb{R}$ par $f(t, x) \stackrel{\text{déf.}}{=} N_t f_0(x)$ est solution de l'équation aux dérivées partielles suivante :*

$$\begin{cases} \partial_t f(t, x) = A f(t, x) = \partial_{xx}^2 f(t, x) - x \partial_x f(t, x) & \text{pour } (t, x) \in]0, +\infty[\times \mathbb{R}, \\ f(0, x) = f_0(x). \end{cases}$$

Exercice 9 *Invariance, symétrie et contraction*

On se propose de montrer ici que le semi-groupe N_t défini dans l'exercice précédent est auto-adjoint dans $L^2(\gamma)$, continu de $L^p(\gamma)$ dans lui-même et peut-être un peu plus...

1. Montrer que la mesure gaussienne centrée réduite γ est invariante pour le semi-groupe d'Ornstein-Uhlenbeck, c'est-à-dire que pour toute fonction $f \in \mathcal{A}$,

$$\int Af(x) \gamma(dx) = 0,$$

ou, de manière équivalente, pour tout $t \geq 0$,

$$\int N_t f(x) \gamma(dx) = \int f(x) \gamma(dx).$$

2. Montrer de plus que le semi-groupe d'Ornstein-Uhlenbeck est symétrique pour la mesure γ c'est-à-dire que pour toutes fonctions $f, g \in \mathcal{A}$,

$$\int N_t f(x) g(x) \gamma(dx) = \int f(x) N_t g(x) \gamma(dx),$$

ou, de manière équivalente,

$$\int Af(x)g(x) \gamma(dx) = \int f(x)Ag(x) \gamma(dx) = - \int f'(x)g'(x) \gamma(dx). \quad (5)$$

On pourra montrer que l'expression $\int N_t f(x)g(x) \gamma(dx)$ est symétrique en f et g .

3. Montrer que la propriété de symétrie est plus forte que celle d'invariance.
4. Montrer que pour tout $t \geq 0$ et tout $p \in [1, +\infty]$, N_t est une contraction de $L^p(\gamma)$ dans lui-même, c'est-à-dire que

$$\forall f \in L^p(\gamma), \quad \|N_t f\|_p \leq \|f\|_p.$$

En déduire la norme de N_t vu comme endomorphisme de $L^p(\gamma)$.

5. Notons $f_\lambda : x \mapsto e^{\lambda x}$. Calculer $\|f_\lambda\|_p$ et montrer que

$$P_t(f_\lambda) = \exp(\lambda^2(1 - e^{-2t})/2) f_{\lambda e^{-t}}.$$

En déduire que P_t n'est pas continu de L^p dans L^q pour $q > 1 + e^{2t}(p - 1)$.

Remarque 2 *La propriété de contraction dans $L^p(\gamma)$ n'est pas propre au processus d'Ornstein-Uhlenbeck. Seul importe ici que le noyau soit une probabilité. On peut par contre montrer le résultat bien plus fort suivant : soit $1 < p < q < \infty$, N_t est une contraction de $L^p(\gamma)$ dans $L^q(\gamma)$ si et seulement si*

$$q \leq 1 + e^{2t}(p - 1).$$

Définition 2 *Les polynômes de Hermite, que nous noterons $(H_n)_n$, peuvent être définis à partir de leur série génératrice :*

$$G(s, x) = \exp(sx - s^2/2) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{s^n}{n!} H_n(x),$$

c'est-à-dire que $H_n(x) = \partial_s^n G(s, x)|_{s=0}$.

Exercice 10 *Orthogonalité et décomposition du semi-groupe d'Ornstein-Uhlenbeck*

Le but de cet exercice est de montrer que les polynômes de Hermite forment une base hilbertienne de $L^2(\gamma)$ mais également une base orthonormée de vecteurs propres pour N_t .

1. Soit $f \in L^2(\gamma)$. On définit la transformée de Laplace de la mesure $\nu = f\gamma$ par

$$L_f(\lambda) = \int f(x)e^{\lambda x} \gamma(dx).$$

Montrer que L_f est finie sur \mathbb{R} .

2. Supposons que f est orthogonale à tous les polynômes. En considérant son développement en série entière au voisinage de 0, montrer que L_f est nulle. Qu'en est-il de f ?
3. En déduire que les polynômes forment un sous-espace dense de $L^2(\gamma)$.
4. Montrer que la transformée de Laplace de γ vaut $e^{\lambda^2/2}$.
5. Soient $s, t \in \mathbb{R}$ fixés. Appliquer N_t à la fonction $x \mapsto G(s, x)$. En déduire

$$N_t(G(s, \cdot))(x) = G(se^{-t}, x).$$

6. Montrer que pour tout $t > 0$ et tout $n \in \mathbb{N}$,

$$N_t(H_n)(x) = e^{-nt}H_n(x).$$

On dit que le polynôme de Hermite H_n est vecteur propre de N_t , de valeur propre e^{-nt} .

7. En déduire (en utilisant également la symétrie de N_t par rapport à γ) que, pour tous entiers m et n et tout $t > 0$,

$$e^{-mt} \int H_m H_n d\gamma = e^{-nt} \int H_m H_n d\gamma.$$

En déduire que les polynômes de Hermite sont orthogonaux dans $L^2(\gamma)$.

8. Calculer $\int G(s, x)^2 \gamma(dx)$ de deux façons différentes. En déduire que les polynômes $(H_n/\sqrt{n!})_{n \in \mathbb{N}}$ forment une base hilbertienne de $L^2(\gamma)$.
9. Quelles sont les valeurs propres de N_t ? Quelles sont les multiplicités de ces valeurs propres et leurs sous-espaces propres ?
10. Même question pour A .

Jürgen Angst

Page web : <http://perso.univ-rennes1.fr/jurgen.angst/>

Courriel : jurgen.angst@univ-rennes1.fr

Références

- [Bak94] D. BAKRY – « L'hypercontractivité et son utilisation en théorie des semigroupes », Lectures on probability theory (Saint-Flour, 1992), Lecture Notes in Math., vol. 1581, Springer, Berlin, 1994, p. 1–114.
- [DCD82] D. DACUNHA-CASTELLE et M. DUFLO – *Probabilités et statistiques. Tome 1*, Masson, Paris, 1982, Problèmes à temps fixe.
- [Laa01] E. LAAMRI – *Mesures, intégration, convolution, et transformée de Fourier des fonctions*, Dunod, 2001.
- [Rud95] W. RUDIN – *Analyse réelle et complexe*, Masson, 1995.