

# Analyse 2008 - Corrigé

Michel Coste<sup>\*†</sup>  
Université de Rennes 1

Ce document provient de la préparation à l'agrégation de mathématiques de l'Université de Rennes 1 :

<http://agreg-maths.univ-rennes1.fr>

## I Préliminaires et exemples

- (a)  $E_\lambda(f) \cap E_\mu(f) = \emptyset$  si  $\lambda \neq \mu$ , et  $\bigcup_{\lambda \in \mathbf{R}} E_\lambda(f) = I^2$ . Les  $E_\lambda(f)$  forment une partition de  $I^2$ .  
(b) Puisque l'application  $(x, y) \mapsto f(x) + f(y)$  de  $I^2$  dans  $\mathbf{R}$  est continue, les  $E_\lambda(f)$  sont fermés dans  $I^2$ . Tous les  $E_\lambda(f)$  sont stables par symétrie  $(x, y) \mapsto (y, x)$  par rapport à la première bissectrice.  
(c) La fonction  $g : x \mapsto g(x) = f(x + x_0)$  est définie sur  $I - x_0 = \{y - x_0, y \in I\}$  et  $E_\lambda(f) = E_\lambda(g) + (x_0, x_0)$ ; autrement dit,  $E_\lambda(f)$  est l'image de  $E_\lambda(g)$  par la translation de vecteur  $(x_0, x_0)$ .
- $E_\lambda(f) = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2, x^2 + y^2 = \lambda\}$  est le cercle de centre l'origine et de rayon  $\sqrt{\lambda}$  pour  $\lambda > 0$ , est réduit à l'origine pour  $\lambda = 0$  et est vide pour  $\lambda < 0$ .
- $E_0(f)$  a pour équation  $0 = x - x^3 + y - y^3 = (x + y)(1 - x^2 + xy - y^2)$ . C'est la réunion de la droite d'équation  $x + y = 0$  et de la conique d'équation

$$1 = x^2 - xy + y^2 = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 (x - y)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 (x + y)^2.$$

Cette dernière est l'ellipse de centre l'origine, de demi-grand axe porté par la droite  $y = x$  de longueur  $\sqrt{2}$  et de demi-petit axe de longueur  $\sqrt{2/3}$ .

- $E_0(f)$  a pour équation  $x^2 + y^2 - x^3 - y^3 = 0$ . En passant en coordonnées polaires par le changement  $x = \rho \cos \theta$ ,  $y = \rho \sin \theta$ , on obtient  $\rho^2(1 - \rho(\cos^3 \theta + \sin^3 \theta)) = 0$ . Donc  $E_0(f)$  est réunion de l'origine (correspondant à  $\rho = 0$ ) et de la courbe

$$\rho = \frac{1}{\cos^3 \theta + \sin^3 \theta}.$$

Il suffit de faire l'étude sur  $\theta \in ]-\pi/4, \pi/4]$  et de compléter par symétrie par rapport à la droite  $y = x$ . On a  $\rho(\theta) > 0$  sur l'intervalle et  $\rho(\pi/4) = \sqrt{2}$ . On a une branche infinie pour  $\theta$  tendant vers  $-\pi/4$  par valeurs supérieures et, puisque

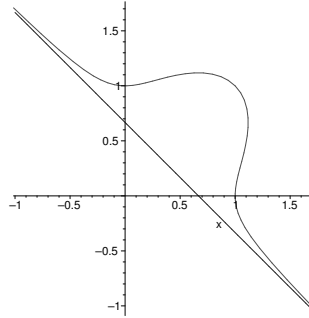
$$\lim_{\theta \rightarrow \pi/4} \rho(\theta) \sin(\theta + \pi/4) = \lim_{\theta \rightarrow \pi/4} \frac{1}{\sqrt{2}(1 - \sin \theta \cos \theta)} = \frac{\sqrt{2}}{3},$$

---

\*Remarques et questions bienvenues à [michel.coste@univ-rennes1.fr](mailto:michel.coste@univ-rennes1.fr)

†Merci à Olivier Ayassou pour une correction de coquille

la droite  $x + y = 2/3$  est asymptote.



5. (a)  $f'(x)$  ne s'annule que pour  $x = 0$  et  $f'$  est croissante au voisinage de 0 car  $f''(0) > 0$ . On a donc  $f'(x) < 0$  pour  $x < 0$  et  $f'(x) > 0$  pour  $x > 0$ . Ainsi  $f$  décroît jusqu'à valoir 0 en 0, puis croît.

$x$		0
$f'(x)$		- 0 +
$f(x)$		↘ 0 ↗

- (b) Par intégration par parties, on a :

$$\begin{aligned} x^2 \int_0^1 (1-u) f''(xu) du &= [(1-u)x f'(xu)]_0^1 + \int_0^1 x f'(xu) du \\ &= 0 + (f(x) - f(0)) = f(x). \end{aligned}$$

- (c) La fonction  $g$  est  $\mathcal{C}^\infty$  sur  $I$  car  $(1-u)f''(xu)$  est  $\mathcal{C}^\infty$  par rapport à  $x$  et toutes ses dérivées par rapport à  $x$  sont continues en  $(u, x)$ . Elle est strictement positive sur  $I \setminus 0$  car sur cet ensemble on a  $g(x) = f(x)/x^2$ , et  $g(0) = \int_0^1 (1-u) f''(0) du = f''(0)/2 > 0$ .
- (d) Puisque  $g$  est  $\mathcal{C}^\infty$  et strictement positive sur  $I$ , les fonctions  $x \mapsto \sqrt{g(x)}$  et  $h : x \mapsto x\sqrt{g(x)}$  sont  $\mathcal{C}^\infty$  sur  $I$ . On a  $h(x)^2 = f(x)$  pour tout  $x \in I$ . Puisque  $h$  coïncide avec  $x \mapsto -\sqrt{f(x)}$  sur  $\{x \in I, x \leq 0\}$  et avec  $x \mapsto \sqrt{f(x)}$  sur  $\{x \in I, x \geq 0\}$ , elle est strictement croissante sur  $I$ . La fonction  $h$  réalise donc une bijection croissante de  $I$  sur l'intervalle  $J = h(I) = ]-\sqrt{\ell}, \sqrt{m}[$ , où  $\ell \in \mathbf{R} \cup \{+\infty\}$  (resp.  $m \in \mathbf{R} \cup \{+\infty\}$ ) est la limite de  $f(x)$  quand  $x$  tend vers  $a$  (resp.  $b$ ). De l'égalité  $h^2(x) = f(x)$  on déduit  $2h(x)h'(x) = f'(x)$  et donc  $h'(x)$  ne s'annule pas pour  $x \neq 0$ . On obtient aussi, par la règle de l'Hopital

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x \neq 0}} h'(x)^2 = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x \neq 0}} \frac{f'(x)^2}{4f(x)} = \frac{1}{2} f''(0) > 0.$$

Ainsi  $h'$  ne s'annule jamais sur  $I$  et, par le théorème d'inversion locale,  $h$  est un difféomorphisme de  $I$  sur  $J$ .

6. Pour  $\lambda$  positif,  $E_\lambda(f) = \{(x, y) \in I^2, h^2(x) + h^2(y) = \lambda\}$  est l'image réciproque par le difféomorphisme  $(h, h) : I^2 \rightarrow J^2$  de l'intersection du cercle d'équation  $x^2 + y^2 = \lambda$  avec  $J^2$ ; il est donc du même type que cette intersection.
7. (a) Les demi-droites  $\{(x, 0) \in \mathbf{R}^2, x > 0\}$  et  $\{(0, y) \in \mathbf{R}^2, y > 0\}$  sont les images de solutions maximales du système  $(S)$ , et l'origine est un point stationnaire. Une solution avec une condition initiale dans  $(\mathbf{R}_+^*)^2$  ne peut donc jamais rencontrer les axes.

- (b) D'après ce qu'on vient de dire  $g(x(t))$  et  $g(y(t))$  sont bien définis et (en oubliant les  $t$  pour alléger l'écriture)

$$(g(x) + g(y))' = g'(x)x' + g'(y)y' = \left(1 - \frac{1}{x}\right)(x - xy) + \left(1 - \frac{1}{y}\right)(-y + xy) = 0.$$

Par conséquent on a  $g(x(t)) + g(y(t)) = g(x_0) + g(y_0)$  pour tout  $t$ , et l'arc paramétré est contenu dans la courbe  $C$  d'équation  $g(x) + g(y) = \lambda$ , où  $\lambda = g(x_0) + g(y_0) > 0$ . On peut appliquer les résultats des questions précédentes à la fonction  $f$  définie sur  $I = ]-1, +\infty[$  par  $f(x) = g(1+x) = x - \ln(1+x)$  qui vérifie bien l'hypothèse **(H)**; dans ce cas  $J = \mathbf{R}$ . La courbe  $C$  est l'image de l'ovale  $E_\lambda(f)$  par la translation de vecteur  $(1, 1)$ .

## II Un problème de dénombrement

1. (a) On a  $\cos z = 0$  si et seulement si  $e^{iz} = -e^{-iz}$ , ce qui vaut à  $e^{2iz} = -1$ , ou encore  $2iz \in i\pi + 2i\pi\mathbf{Z}$ . Donc  $\cos z = 0$  si et seulement si  $z = k\pi + \pi/2$  avec  $k \in \mathbf{Z}$ .
- (b) La question précédente montre que  $\cos z$  ne s'annule pas sur le disque ouvert de centre l'origine et de rayon  $\pi/2$ , et donc la fonction

$$z \mapsto \frac{\sin z + 1}{\cos z}$$

est développable en série entière sur ce disque. Comme cette fonction prend des valeurs réelles pour  $z$  réel, les coefficients de cette série (qui est la série de Taylor de la fonction à l'origine) sont réels, et on peut les écrire sous la forme  $b_n/n!$  avec  $b_n \in \mathbf{R}$ .

- (c) La fonction  $H$  est méromorphe sur le disque ouvert  $D$  de centre l'origine et de rayon  $3\pi/2$ , avec des poles possibles seulement en  $\pi/2$  et  $-\pi/2$ .

Examinons d'abord ce qui se passe en  $\pi/2$ , en faisant le changement de variable  $w = z - \pi/2$ . On sait que  $\sin(w) = w - w^3 A(w)$  avec  $A$  fonction entière et que  $\cos(w) = 1 - w^2 B(w)$  avec  $B$  entière. Alors

$$H(w + \pi/2) = \frac{1 + \cos(w)}{-\sin(w)} + \frac{2}{w} = \frac{-2 + w^2 B(w) + 2 - 2w^2 A(w)}{w - w^3 A(w)} = \frac{w(B(w) - 2A(w))}{1 - w^2 A(w)}.$$

Donc  $H(w + \pi/2)$  est holomorphe au voisinage de 0, et  $H(z)$  est holomorphe au voisinage de  $\pi/2$ .

Passons maintenant à  $-\pi/2$ , en faisant le changement de variable  $u = z + \pi/2$ . Alors

$$H(u - \pi/2) = \frac{1 - \cos(u)}{\sin(u)} + \frac{2}{u - \pi} = \frac{u^2 B(u)}{u - u^3 A(u)} = \frac{u B(u)}{1 - u^2 A(u)} + \frac{2}{u - \pi}.$$

Donc  $H(u - \pi/2)$  est holomorphe au voisinage de 0, et  $H(z)$  est holomorphe au voisinage de  $-\pi/2$ .

La fonction  $H$  a donc un prolongement holomorphe sur le disque  $D$ .

- (d) On a le développement en série

$$H(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \left( \frac{b_n}{n!} - \frac{2^{n+2}}{\pi^{n+1}} \right) z^n,$$

et le rayon de convergence de cette série entière est au moins égal à  $3\pi/2 > 2$  d'après la question précédente. Par conséquent

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left( \frac{b_n}{n!} - \frac{2^{n+2}}{\pi^{n+1}} \right) 2^n = 0,$$

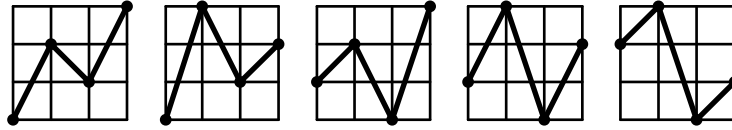
ce qui entraîne  $\frac{2^n b_n}{n!} \sim \frac{4^{n+1}}{\pi^{n+1}}$  puisque cette dernière quantité tend vers l'infini avec  $n$ , et donc

$$b_n \sim \frac{2^{n+2} n!}{\pi^{n+1}} .$$

2. (a) Pour  $n = 2$ , la seule permutation alternante est la permutation identité :  $e_2 = 1$ . Pour  $n > 2$ , il est plus parlant de dessiner les permutations alternantes, avec en abscisse  $a_0, a_1, \dots, a_{n-1}$  et en ordonnée leurs images par la permutation. La condition d'alternance se traduit par les dessins en zigzag. Pour  $n = 3$  :



et pour  $n = 4$  :



Le dernier schéma, par exemple, représente la permutation  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$  (où l'on ne fait figurer que les indices). On a donc  $e_3 = 2$ ,  $e_4 = 5$ .

- (b) Une symétrie d'axe horizontal sur les petits schémas transforme un zigzag alternant en un zigzag antialternant. En termes de permutations, la permutation  $\sigma$  est alternante si et seulement si  $\tau \circ \sigma$  est antialternante (où  $\tau$  est l'involution  $a_i \mapsto a_{n-1-i}$ ). On met ainsi les permutations alternantes en bijection avec les anti-alternantes, ce qui montre qu'il y en a autant.
- (c) Soit  $\sigma$  une permutation alternante ou antialternante de  $\{a_0, \dots, a_n\}$ ,  $j$  l'indice tel que  $\sigma(j) = a_0$ . On range l'image par  $\sigma$  de  $\{a_0, \dots, a_{j-1}\}$  en  $b_0 < b_1 < \dots < b_{j-1}$  et on définit la permutation  $\sigma_{\text{gauche}}$  de  $\{a_0, \dots, a_{j-1}\}$  par  $\sigma_{\text{gauche}}(a_i) = a_k$  si  $\sigma(a_i) = b_k$ ; la permutation  $\sigma_{\text{gauche}}$  est alternante si  $j$  est pair et antialternante si  $j$  est impair. De même on range l'image de  $\{a_{j+1}, \dots, a_n\}$  par  $\sigma$  en  $b_{j+1} < \dots < b_n$ , et on définit la permutation  $\sigma_{\text{droite}}$  de  $\{a_{j+1}, \dots, a_n\}$  par  $\sigma_{\text{droite}}(a_i) = a_k$  si  $\sigma(a_i) = b_k$ ; la permutation  $\sigma_{\text{droite}}$  est toujours antialternante. Notons  $B_\sigma = \{b_0, \dots, b_{j-1}\}$ . À une permutation alternante ou antialternante  $\sigma$  on associe ainsi un quadruplet  $(j, B_\sigma, \sigma_{\text{gauche}}, \sigma_{\text{droite}})$  et ceci définit bien une bijection de l'ensemble des permutations alternantes ou antialternantes de  $\{a_0, \dots, a_n\}$  sur l'ensemble des quadruplets  $(i, B, \rho, \tau)$  où  $i$  est un entier entre 0 et  $n$ ,  $B$  une partie à  $i$  éléments de  $\{a_1, \dots, a_n\}$ ,  $\rho$  une permutation de  $\{a_0, \dots, a_{i-1}\}$ , alternante si  $i$  est pair et antialternante si  $i$  est impair, et  $\tau$  une permutation antialternante de  $\{a_{i+1}, \dots, a_n\}$  (si  $i = 0$  ou 1 ou  $n - 1$  ou  $n$ , on compte l'unique permutation sur des ensembles à 0 ou 1 éléments à la fois comme alternante et antialternante). On peut maintenant compter en prenant en compte le fait qu'il y a autant de permutations alternantes que d'antialternantes, et que pour  $n \geq 1$  l'ensemble des permutations antialternantes sur  $n + 1$  éléments est disjoint de celui des antialternantes. On obtient donc pour tout entier  $n \geq 1$

$$2e_{n+1} = \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} e_i e_{n-i} .$$

- (d) Les valeurs à l'origine de la fonction  $F : z \mapsto (\sin z + 1)/\cos z$  et de sa dérivée donnent immédiatement  $b_0 = 1 = e_0$  et  $b_1 = 1 = e_1$ . Il suffit donc de montrer que les  $b_n$  vérifient la même relation de récurrence que les  $e_n$  pour établir que  $b_n = e_n$  pour tout entier  $n$ . La formule établie à la question précédente peut se réécrire

$$2(n+1) \frac{e_{n+1}}{(n+1)!} = \sum_{i=0}^n \frac{e_i}{i!} \frac{e_{n-i}}{(n-i)!}.$$

On se doute donc qu'il faut chercher une relation entre  $2F'(z)$  et  $F(z)^2$ . Calculons donc

$$2F'(z) = \frac{2 + 2\sin z}{\cos^2 z} \quad \text{et} \quad F(z)^2 = \frac{\sin^2 z + 2\sin z + 1}{\cos^2 z},$$

d'où  $2F'(z) = 1 + F(z)^2$ . Cette équation différentielle satisfaite par  $F$  donne bien pour son développement en série entière

$$2(n+1) \frac{b_{n+1}}{(n+1)!} = \sum_{i=0}^n \frac{b_i}{i!} \frac{b_{n-i}}{(n-i)!}$$

pour tout entier  $n \geq 1$ . On a démontré que  $b_n = e_n$  pour tout entier naturel  $n$ .

### III Les serpents d'Arnold

1. Si  $f$  est un serpent à  $n$  points critiques, alors  $f$  est décroissant sur  $]-\infty, x_0]$ , croissant sur  $[x_0, x_1]$  et change de sens de variation à chaque fois qu'on traverse un point critique. En particulier la permutation  $\sigma_f$  associée à  $f$  est alternante. Si  $n$  est pair (resp. impair),  $f(x)$  tend vers  $-\infty$  (resp.  $+\infty$ ) quand  $x$  tend vers  $+\infty$ .
2. (a) La relation  $\sim$  est réflexive car  $f = f \circ \text{Id}_{\mathbf{R}}$ , symétrique car si  $f = g \circ h$  et que  $h$  est un difféomorphisme de  $\mathbf{R}$ , alors  $h^{-1}$  est un difféomorphisme de  $\mathbf{R}$  et  $g = f \circ h^{-1}$ . Elle est transitive car si  $f = g_1 \circ h_1$  et  $g_1 = g_2 \circ h_2$  où  $h_1$  et  $h_2$  sont des difféomorphismes de  $\mathbf{R}$ , alors  $h = h_2 \circ h_1$  est un difféomorphisme de  $\mathbf{R}$  et  $f = g_2 \circ h$ .  
(b) Si  $f = g \circ h$  et que  $h$  est un difféomorphisme de  $\mathbf{R}$ , alors le difféomorphisme  $(h, h)$  de  $\mathbf{R}^2$  envoie  $E_\lambda(f)$  sur  $E_\lambda(g)$ ; ils sont donc de même type.
3. Si  $g = f \circ h$ , alors  $g$  est  $\mathcal{C}^\infty$  si et seulement si  $f$  l'est,  $g' = (f' \circ h) h'$  et  $g'' = (f'' \circ h)(h')^2 + (f' \circ h) h''$ . Puisque  $h'(x)$  n'est jamais nul,  $x$  est un point critique de  $g$  si et seulement si  $h(x)$  est un point critique de  $f$ ; de plus, comme on a dans ce cas  $g''(x) = f''(h(x)) h'(x)^2$ ,  $x$  est un point critique non dégénéré de  $g$  si et seulement si  $h(x)$  est un point critique non dégénéré de  $f$ . Si  $x_0 < \dots < x_n$  sont les points critiques de  $g$ , alors  $h(x_0) < \dots < h(x_n)$  sont ceux de  $f$ . Par ailleurs la valeur critique de  $g$  en  $x_i$  est égale à la valeur critique de  $f$  en  $h(x_i)$ . Enfin puisque  $h$  est un difféomorphisme croissant,  $h(x)$  tend vers  $+\infty$  (resp.  $-\infty$ ) quand  $x$  tend vers  $+\infty$  (resp.  $-\infty$ ); donc  $g$  et  $f$  ont les mêmes limites à l'infini. En conclusion,  $f$  appartient à  $\mathcal{A}_n$  si et seulement si  $f \circ h$  appartient à  $\mathcal{A}_n$ .

Dans ce cas, comme  $g(x_i) = f(h(x_i))$  et que  $h(x_i)$  est bien le  $i$ -ème point critique de  $f$ , la permutation  $\sigma_g$  est égale à  $\sigma_f$ .

4. (a) Notons  $x_0 < \dots < x_{n-1}$  les points critiques de  $f$  et  $y_0 < \dots < y_{n-1}$  ceux de  $g$ ; on a par hypothèse  $f(x_i) = \sigma_f(a_i) = \sigma_g(a_i) = g(y_i)$  pour  $i = 0, \dots, n-1$ , et nous noterons  $v_i$  cette valeur critique commune. Choisissons  $i$  entre 1 et  $n-1$ , et posons  $I_i = [x_{i-1}, x_i]$ ,  $J_i = [y_{i-1}, y_i]$ . La fonction  $f$  est strictement monotone sur  $I_i$  et réalise un homéomorphisme de ce segment sur le segment d'extrémités  $v_{i-1}$  et  $v_i$ ; la fonction  $g$  est aussi strictement monotone, de même sens de variation, sur  $J_i$  et réalise un homéomorphisme de ce segment sur le segment d'extrémités

$v_{i-1}$  et  $v_i$ . Pour  $x \in I_i$ , définissons  $h_i(x)$  comme l'unique réel  $y$  de  $J_i$  tel que  $f(x) = g(y)$ ; alors  $h_i$  est un homéomorphisme croissant de  $I_i$  sur  $J_i$  et  $g \circ h_i = f|_{I_i}$ . On peut procéder de manière analogue sur les intervalles non bornés pour définir des homéomorphismes croissants

$$h_0 : I_0 = ]-\infty, x_0] \longrightarrow J_0 = ]-\infty, x_0]$$

et  $h_n : I_n = [x_{n-1}, +\infty[ \longrightarrow J_n = [y_{n-1}, +\infty[$

vérifiant  $g \circ h_0 = f|_{I_0}$  et  $g \circ h_n = f|_{I_n}$  (par exemple,  $f$  et  $g$  réalisent des homéomorphismes décroissants respectivement de  $I_0$  sur  $[v_0, +\infty[$  et de  $J_0$  sur  $[v_0, +\infty[$ ). On obtient alors un homéomorphisme croissant  $h : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$  vérifiant  $f = g \circ h$  en posant  $h(x) = h_i(x)$  si  $x \in I_i$ .

- (b) Les fonctions  $f$  et  $g$  réalisent des difféomorphismes de l'intérieur de chacun des intervalles  $I_i$  et  $J_i$  respectivement sur leurs images; donc  $h$  restreint à l'intérieur de  $I_i$  est un difféomorphisme sur l'intérieur de  $J_i$ , et ceci pour  $i = 0, 1, \dots, n$ . Il ne reste donc qu'à montrer que, pour  $i = 1, \dots, n-1$ ,  $h$  réalise un difféomorphisme d'un voisinage de  $x_i$  sur un voisinage de  $y_i$ .

Supposons que  $f$  et  $g$  ont un minimum local en  $x_i$  et  $y_i$  respectivement. Alors les fonctions  $t \mapsto f(x_i + t) - v_i$  et  $t \mapsto g(y_i + t) - v_i$  satisfont l'hypothèse **(H)** de la question 5 de la partie I. Il existe donc des difféomorphismes croissants  $\varphi$  et  $\gamma$  d'un voisinage de 0 sur un voisinage de 0 tels que  $f(x_i + t) = v_i + \varphi(t)^2$  et  $g(y_i + t) = v_i + \gamma(t)^2$ . Posons  $\eta(t) = h(x_i + t) - y_i$ ;  $\eta$  est un homéomorphisme croissant de  $\mathbf{R}$  tel que  $\eta(0) = 0$ , et il vérifie

$$\varphi(t)^2 = f(x_i + t) - v_i = g(h(x_i + t)) - v_i = g(y_i + \eta(t)) - v_i = \gamma(\eta(t))^2$$

au voisinage de 0. Si  $t < 0$ , alors  $\varphi(t) < 0$ ,  $\eta(t) < 0$  et  $\gamma(\eta(t)) < 0$ . Si  $t \geq 0$ , alors  $\varphi(t) \geq 0$ ,  $\eta(t) \geq 0$  et  $\gamma(\eta(t)) \geq 0$ . On a toujours  $\varphi(t) = \gamma(\eta(t))$  au voisinage de 0 et donc  $\eta = \gamma^{-1} \circ \varphi$  est un difféomorphisme d'un voisinage de 0 sur un voisinage de 0. Puisque  $h(x) = y_i + \eta(x - x_i)$ , on en déduit que  $h$  réalise un difféomorphisme d'un voisinage de  $x_i$  sur un voisinage de  $y_i$ .

Dans le cas d'un maximum local, on aurait dû travailler avec les fonctions  $t \mapsto v_i - f(x_i + t)$  et  $t \mapsto v_i - g(y_i + t)$ .

5. (a) On vient de montrer que l'application de  $\mathcal{A}_n/\sim$  dans l'ensemble des permutations alternantes de  $\{a_0, a_1, \dots, a_{n-1}\}$  qui à la classe d'équivalence de  $f \in \mathcal{A}_n$  associe  $\sigma_f$  est injective. Donc le nombre de classes d'équivalence de  $\sim$  est inférieur ou égal à  $b_n$ .
- (b) On a démontré que si  $f \sim g$  alors  $E_\lambda(f)$  et  $E_\lambda(g)$  sont de même type. On admet que pour  $f \in \mathcal{A}_n$  fixé, le type de  $E_\lambda(f)$  ne dépend que de la position relative de  $\lambda$  par rapport aux  $n(n+1)/2$  nombres  $a_i + a_j$ , qui délimitent  $n(n+1)/2 + 1$  intervalles; il y a donc au maximum  $n^2 + n + 1$  types possibles pour  $E_\lambda(f)$  quand  $\lambda$  parcourt  $\mathbf{R}$ . Ceci fait donc au plus  $(n^2 + n + 1)b_n$  types possibles de  $E_\lambda(f)$  pour  $\lambda \in \mathbf{R}$  et  $f \in \mathcal{A}_n$ .
6. (a) La fonction  $u_\lambda : x \mapsto \lambda - f(x)$  est continue strictement monotone sur  $I_i$ . L'intersection avec  $I_i$  de l'image réciproque de l'intervalle fermé  $f(I_j)$  par  $u_\lambda$  est donc un intervalle fermé  $F_{i,j}$  de  $I_i$ . On sait que  $f$  réalise un homéomorphisme (strictement monotone) de  $I_j$  sur  $f(I_j)$ . Donc  $E_\lambda(f) \cap (I_i \times I_j) = \{(x, y) \in I_i \times I_j, f(y) = u_\lambda(x)\}$  est le graphe de l'application continue strictement monotone  $(f|_{I_j})^{-1} \circ u_\lambda|_{F_{i,j}}$ .
- (b) Si  $b$  est une extrémité de  $F_{i,j}$  alors ou bien  $b$  est une extrémité de  $I_i$ , ou bien  $\lambda - f(b)$  est une extrémité de  $f(I_j)$ . Donc si  $(b, c)$  est une extrémité du sous-graphe, ou bien  $b$  est une extrémité de  $I_i$ , ou bien  $c$  est une extrémité de  $I_j$ ; les deux cas ne peuvent pas se produire simultanément puisqu'on a supposé  $\lambda$  différent de tous les  $a_k + a_\ell$ .
- (c) D'après ce qu'on vient de dire, une extrémité de sous-graphe dans  $I_i \times I_j$  appartient à un et un seul des pavés  $I_{i-1} \times I_j, I_{i+1} \times I_j, I_i \times I_{j-1}$  et  $I_i \times I_{j+1}$ ; elle appartient donc exactement à un autre sous-graphe. Puisqu'un sous-graphe est le graphe d'une fonction strictement monotone, l'intersection d'un côté du pavé  $I_i \times I_j$  avec le sous-graphe est soit vide, soit une extrémité du sous-graphe, Donc deux sous-graphes ne peuvent se rencontrer qu'en une extrémité commune.

- (d) Si  $n$  est impair, la limite de  $f$  en  $-\infty$  et en  $+\infty$  est  $+\infty$ ; la fonction  $f$  a donc un minimum global et, étant donné  $\lambda \in \mathbf{R}$ , il existe  $M > 0$  tel que si  $|x| \geq M$  ou  $|y| \geq M$  alors  $f(x) + f(y) > \lambda$ . Donc  $E_\lambda(f)$ , et a fortiori tous les sous-graphes, sont bornés.
- Si  $n$  est pair, la limite de  $f$  en  $-\infty$  est  $+\infty$  et sa limite en  $+\infty$  est  $-\infty$ . Le sous-graphe dans  $I_i \times I_j$  est non borné si et seulement si un parmi  $\{-\infty, +\infty\}$  est une extrémité de  $f(I_i)$ , et l'autre une extrémité de  $f(I_j)$ . Il y a donc exactement deux sous-graphes non bornés, ceux contenus dans  $I_0 \times I_n$  et dans  $I_n \times I_0$ .
7. (a) Un sous-graphe  $S$  est connexe, et même connexe par arcs, comme image d'un intervalle par une fonction continue. L'ensemble  $E_\lambda(f)$  est une réunion finie de sous-graphes connexes et fermés dans  $E_\lambda(f)$ . Donc  $E_\lambda(f)$  a un nombre fini de composantes connexes, qui sont chacune une réunion finie de sous-graphes. Soit  $C$  une composante connexe de  $E_\lambda(f)$ .
- Si  $C$  est non bornée, elle contient un sous-graphe  $S_1$  non borné, qui a une seule extrémité. D'après les résultats de la question précédente, on peut construire une unique suite maximale (forcément finie) de sous-graphes  $S_1, S_2, \dots, S_p$  tous différents tels que  $S_i$  et  $S_{i+1}$  aient une extrémité commune pour  $i = 1, \dots, p-1$ ; la maximalité entraîne que  $S_p$  n'a qu'une extrémité (celle commune avec  $S_{p-1}$ ), et donc  $S_p$  est l'autre sous-graphe non borné de  $E_\lambda(f)$ . La réunion  $\bigcup_{i=1}^p S_i$  est un fermé connexe, disjoint de la réunion des autres sous-graphes, elle aussi fermée dans  $E_\lambda(f)$ . Donc  $C = \bigcup_{i=1}^p S_i$ .
- Supposons maintenant  $C$  bornée, et soit  $S_1$  un sous-graphe contenu dans  $C$ , qui a deux extrémités  $M_0$  et  $M_1$ . Il existe un unique sous-graphe  $S_2$  différent de  $S_1$  qui a aussi  $M_1$  pour extrémité. On peut compléter  $S_0, S_1$  de manière unique en une suite maximale (forcément finie) de sous-graphes  $S_1, S_2, \dots, S_p$  tous différents tels que  $S_i$  et  $S_{i+1}$  aient une extrémité commune pour  $i = 1, \dots, p-1$ . Tous les  $S_i$  sont dans  $C$ ; ils sont donc bornés et ont deux extrémités chacun. La maximalité entraîne que l'extrémité de  $S_p$  qui n'est pas commune avec  $S_{p-1}$  est  $M_0$ . La réunion  $\bigcup_{i=1}^p S_i$  est un fermé connexe, disjoint de la réunion des autres sous-graphes, qui est aussi fermée dans  $E_\lambda(f)$ . Donc  $C = \bigcup_{i=1}^p S_i$ .
- (b) Le raisonnement précédent et le (d) de la question 6 montrent qu'il y a au plus une composante connexe non bornée, et qu'il y en a une si et seulement si  $n$  est pair.
- (c) Reprenons les notations de (a) quand  $C$  est bornée. Chaque sous graphe  $S_i$  a une extrémité entrante commune avec  $S_{i-1}$  et une extrémité sortante commune avec  $S_{i+1}$  (où  $i-1$  et  $i+1$  sont pris modulo  $p$ ). Divisons le cercle unité  $S^1$  en  $p$  arcs égaux au moyen des  $\exp(2i\pi/p)$ . Chaque  $S_i$  est homéomorphe à un intervalle compact, et on peut donc choisir un homéomorphisme de l'arc qui va de  $\exp(2(i-1)\pi/p)$  à  $\exp(2i\pi/p)$  dans le sens direct sur  $S_i$  parcouru de l'extrémité entrante à l'extrémité sortante. Ces homéomorphismes se recollent en une bijection continue de  $S^1$  sur  $C$ , qui est d'ailleurs un homéomorphisme puisque  $S^1$  est compact.
8. Chaque ovale est constitué d'au moins quatre sous-graphes (pour revenir à  $I_i \times I_j$  en partant de  $I_i \times I_j$  sans retourner sur ses pas, il faut traverser au moins quatre frontières). Si  $n$  est impair, il y a au plus  $(n+1)^2$  sous-graphes, donc au plus  $\left(\frac{n+1}{2}\right)^2$  ovales. Si  $n$  est pair, il y a au moins  $2n+1$  sous-graphes qui constituent la composante connexe non bornée (pour aller de  $I_0 \times I_n$  à  $I_n \times I_0$  il faut traverser au moins  $2n$  frontières). Le nombre d'ovales dans ce cas est donc au plus  $\frac{1}{4}((n+1)^2 - 2n - 1) = \left(\frac{n}{2}\right)^2$ . Dans les deux cas le nombre d'ovales est bien majoré par  $\left\lfloor \frac{n+1}{2} \right\rfloor^2$ .
9. (a) La fonction  $f : x \mapsto x - x^3$  étudiée dans la question I-3 est dans  $\mathcal{A}_2$ , avec  $a_0 = -1/\sqrt{3}$  et  $a_1 = 1/\sqrt{3}$ . On a  $0 = a_0 + a_1$  et on a vu que  $E_0(f)$  est la réunion d'une droite et d'une conique. Un autre exemple a été vu dans la question I-4, avec ici  $E_0(f)$  qui est la réunion d'un point et d'une courbe non bornée (dont on pourrait montrer qu'elle a même type qu'une droite).

- (b) Quitte à composer  $f$  avec une fonction affine croissante, on peut supposer que  $a_0 = -1$  et  $a_1 = 1$ . La fonction  $g$  définie par  $g(x) = -f(-x)$  est aussi dans  $\mathcal{A}_2$ , et donc  $g \sim f$ . L'ensemble  $E_\lambda(f)$  est l'image par la symétrie de centre l'origine de  $E_{-\lambda}(g)$  et est donc de même type que  $E_{-\lambda}(f)$  d'après III-2-(b). Puisqu'on admet que le type de  $E_\lambda(f)$  ne dépend que de la position relative de  $\lambda$  par rapport aux  $a_i + a_j$ , il y a donc au maximum quatre types pour  $E_\lambda(f)$  :
- celui pour  $\lambda > 2 = a_1 + a_1$  qui est le même que celui pour  $\lambda < -2 = a_0 + a_0$ ,
  - celui pour  $\lambda = 2$  qui est le même que celui pour  $\lambda = -2$ ,
  - celui pour  $a_0 + a_1 = 0 < \lambda < 2$  qui est le même que celui pour  $0 > \lambda > -2$ ,
  - celui pour  $\lambda = 0$ .

## IV Réalisation polynomiale des serpents

1. On suppose  $\phi : U \rightarrow V$  ouverte (**H1** : l'image d'un ouvert est ouverte) et propre (**H2** : l'image réciproque d'un compact de  $V$  est compacte). D'après **H1**,  $\phi(U)$  est un ouvert de  $V$ . Montrons que  $\phi(U)$  est aussi fermé dans  $V$ . Soit  $y \in V$  appartenant à l'adhérence de  $\phi(U)$  et soit  $K$  une boule fermée de centre  $y$  et de rayon  $\varepsilon > 0$  suffisamment petit pour que l'on ait  $K \subset V$ . Il existe une suite  $(x_n)$  d'éléments de  $U$  telle que  $\lim \phi(x_n) = y$ . On peut supposer  $\phi(x_n) \in K$  pour tout  $n$  car c'est sûrement vrai à partir d'un certain rang. Ainsi les  $x_n$  sont dans  $\phi^{-1}(K)$ , qui est compact d'après **H2**. On peut donc extraire de la suite  $(x_n)$  une sous-suite qui converge vers un  $x \in \phi^{-1}(K) \subset U$ . Par continuité de  $\phi$ , on a  $\phi(x) = y$  et donc  $y \in \phi(U)$ .  
En conclusion  $\phi(U)$  est un ouvert fermé non vide de  $V$  qui est connexe, donc  $\phi(U) = V$ .
2. Soit  $P$  un polynôme unitaire de degré  $n$ ,  $\alpha_1, \dots, \alpha_n$  ses racines dans  $\mathbf{C}$  (comptées avec multiplicité). On a  $|P(t)| = \prod_{i=1}^n |t - \alpha_i|$ . La réunion des disques de centres les  $\alpha_i$  et de rayon  $1/4n$  recouvre une partie de  $[0, 1]$  de mesure au plus  $1/2$ . Sur le complémentaire dans  $[0, 1]$  on a  $|P(t)| \geq (4n)^{-n}$ ; comme ce complémentaire a une mesure supérieure ou égale à  $1/2$ , on a  $\int_0^1 |P(t)| dt \geq (4n)^{-n}/2$ . Ceci montre que la borne inférieure de  $\int_0^1 |P(t)| dt$  pour  $P$  polynôme unitaire de degré  $n$  est strictement positive.
3. Si on avait  $\det(R_i(t_j)) = 0$ , il existerait des réels  $\lambda_1, \dots, \lambda_{n-1}$  non tous nuls tels que  $\sum_{i=1}^{n-1} \lambda_i R_i(t_j) = 0$  pour  $j = 1, \dots, n-1$ . Le polynôme  $\sum_{i=1}^{n-1} \lambda_i R_i$  aurait donc  $n-1$  racines distinctes, et comme il est de degré  $\leq n-2$ , ceci impliquerait  $\sum_{i=1}^{n-1} \lambda_i R_i = 0$ . Ceci contredit le fait que les polynômes  $R_i$  sont linéairement indépendants. Donc  $\det(R_i(t_j)) \neq 0$ .
4. Le polynôme  $P_x$  est strictement positif sur  $]0, x_1[$  et sur tous les  $]x_{2i}, x_{2i+1}[$ . Il est strictement négatif sur tous les  $]x_{2i-1}, x_{2i}[$ . On a donc  $y_1 = \int_0^{x_1} P_x(t) dt > 0$  et, pour tout  $i > 0$ ,

$$(-1)^i (y_{i+1} - y_i) = (-1)^i \int_{x_i}^{x_{i+1}} P_x(t) dt > 0.$$

Par conséquent  $\Phi$  est bien définie de  $\Omega_1$  dans  $\Omega_2$ . On calcule les dérivées partielles

$$\begin{aligned} \frac{\partial y_i}{\partial x_j} &= \int_0^{x_i} \frac{\partial P_x(t)}{\partial x_j} dt = \int_0^{x_i} \frac{P_x(t)}{x_j - t} dt \\ &= x_i^2 Q_{j,x}(x_i) \quad \text{si } j \neq i, \\ \frac{\partial y_i}{\partial x_i} &= P_x(x_i) + \int_0^{x_i} \frac{\partial P_x(t)}{\partial x_i} dt = \int_0^{x_i} \frac{P_x(t)}{x_i - t} dt \\ &= x_i^2 Q_{i,x}(x_i). \end{aligned}$$



Par conséquent le déterminant jacobien de  $\Phi$  en  $x$  est

$$\det(x_i^2 Q_{j,x}(x_i)) = \left( \prod_{i=1}^{n-1} x_i \right)^2 \det(Q_{j,x}(x_i)) .$$

On remarque que  $Q_{j,x}$  est bien un polynôme, de degré  $n-2$ . Les  $Q_{j,x}$  pour  $j = 1, \dots, n-1$  forment une famille libre. En effet, si on a une relation  $\sum_{j=1}^{n-1} \lambda_j Q_{j,x} = 0$  avec les  $\lambda_i$  réels, on en déduit pour tout  $t$

$$\int_0^t \sum_{j=1}^{n-1} \lambda_j \frac{P_x(u)}{x_j - u} du = 0 ,$$

d'où en dérivant par rapport à  $t$

$$\sum_{j=1}^{n-1} \lambda_j \frac{P_x(t)}{x_j - t} = 0$$

pour tout  $t$ ; en faisant  $t = x_j$  on obtient  $\lambda_j = 0$ , pour  $j = 1, \dots, n-1$ . D'après la question 3, le déterminant jacobien de  $\Phi$  est non nul pour tout  $x \in \Omega_1$ . Par le théorème d'inversion locale, pour tout  $x \in \Omega_1$ , l'image par  $\Phi$  d'un voisinage de  $x$  est un voisinage de  $\Phi(x)$ . Donc  $\Phi$  vérifie **H1**.

5. On a, vu le signe de  $P_x$  sur chacun des intervalles délimités par  $0, x_1, \dots, x_{n-1}$  :

$$y_1 + \sum_{i=1}^{n-2} (-1)^i (y_{i+1} - y_i) = \int_0^{x_{n-1}} |P_x(t)| dt .$$

Faisons le changement de variable  $t = x_{n-1} u$ . On obtient

$$\int_0^{x_{n-1}} |P_x(t)| dt = x_{n-1} \int_0^1 |P_x(x_{n-1} u)| du = (x_{n-1})^{n+1} \int_0^1 \left| \frac{(-1)^{n-1}}{(x_{n-1})^n} P_x(x_{n-1} u) \right| du .$$

Le polynôme  $\frac{(-1)^{n-1}}{(x_{n-1})^n} P_x(x_{n-1} u)$  est unitaire en  $u$  de degré  $n$ . D'après la question 2, on obtient

$$y_1 + \sum_{i=1}^{n-2} (-1)^i (y_{i+1} - y_i) \geq C (x_{n-1})^{n+1} ,$$

où  $C$  ne dépend que de  $n$ .

6. Soit  $K$  un compact de  $\Omega_2$ . Il existe des réels strictement positifs  $M$  et  $m$  tels que, pour tout  $y = (y_1, \dots, y_{n-1}) \in K$ ,  $|y_i| \leq M$  pour  $i = 1, \dots, n-1$ ,  $y_1 \geq m$  et  $(-1)^i (y_{i+1} - y_i) \geq m$  pour  $i = 1, \dots, n-2$ .

L'ensemble  $\Phi^{-1}(K)$  est borné car d'après 5, si  $\Phi(x) \in K$ , on a  $|x_{n-1}| \leq ((2n-3)M/C)^{1/(n+1)} = N$  et par conséquent  $|x_i| \leq N$  pour tout  $i$ . Il est aussi fermé dans  $\Omega_1$ , mais il faut montrer qu'il est fermé dans  $\mathbf{R}^{n-1}$ .

On remarque d'abord que  $|P_x(t)|$  a un maximum  $A$  quand  $(x, t)$  parcourt l'ensemble compact  $[-N, N]^n$ . On en déduit, si  $\Phi(x) \in K$ ,

$$y_1 = \int_0^{x_1} |P_x(t)| dt \leq A x_1 \quad \text{et} \quad (-1)^i (y_{i+1} - y_i) = \int_{x_i}^{x_{i+1}} |P_x(t)| dt \leq A (x_{i+1} - x_i) ,$$

d'où  $x_1 \geq m/A$  et  $x_{i+1} - x_i \geq m/A$  pour  $i = 1, \dots, n-2$ . L'ensemble

$$F = \{(x_1, \dots, x_{n-1}) \in \mathbf{R}^{n-1}, \quad x_1 \geq m/A \quad \text{et} \quad x_{i+1} - x_i \geq m/A \quad \text{pour} \quad i = 1, \dots, n-2\}$$

contient  $\Phi^{-1}(K)$  et est contenu dans  $\Omega_1$ . Donc  $\Phi^{-1}(K)$  est fermé dans  $F$  et, puisque  $F$  est fermé dans  $\mathbf{R}^{n-1}$ ,  $\Phi^{-1}(K)$  est fermé dans  $\mathbf{R}^{n-1}$ . On conclut que  $\Phi^{-1}(K)$  est compact. On a montré que  $\Phi$  vérifie **H2**.

Les deux ouverts  $\Omega_1$  et  $\Omega_2$  sont convexes car ce sont des intersections de demi-espaces ; ils sont donc connexes (en fait, la connexité de  $\Omega_1$  ne sert pas). D'après la question 1,  $\Phi$  est surjective. Soit  $f \in \mathcal{A}(a_0, \dots, a_{n-1})$ . Alors

$$y = (\sigma_f(a_1) - \sigma_f(a_0), \sigma_f(a_2) - \sigma_f(a_0), \dots, \sigma_f(a_{n-1}) - \sigma_f(a_0)) \in \Omega_2$$

et on peut trouver  $x \in \Omega_1$  tel que  $\Phi(x) = y$ . Soit  $\Pi$  le polynôme de degré  $n + 1$  défini par

$$\Pi(u) = \sigma_f(a_0) + \int_0^u P_x(t) dt .$$

On a  $\Pi'(u) = P_x(u)$ . Les points critiques de  $\Pi$  sont donc  $0, x_1, \dots, x_{n-1}$ , et ils sont non dégénérés. Les valeurs critiques sont  $\sigma_f(a_0), \dots, \sigma_f(a_{n-1})$ . La limite de  $\Pi$  en  $-\infty$  est  $+\infty$ . On a donc  $\Pi \in \mathcal{A}(a_0, \dots, a_{n-1})$  et  $\Pi \sim f$  car  $\sigma_\Pi = \sigma_f$ . Ceci conclut la démonstration du théorème de Thom.