Trisection de l'angle et duplication du cube

Xavier Caruso

Janvier 2008

Le but de cette note est de montrer que les deux problèmes historiques de constructions à la règle et au compas qui sont la trisection de l'angle et la duplication du cube sont, en un sens, indépendants. Précisément, on montre que l'utilisation d'un instrument qui duplique le cube ne permet de trisecter aucun angle supplémentaire que ne le permettent, seuls, la règle et le compas. Et, réciproquement, on prouve que la duplication du cube reste impossible si l'on s'autorise à utiliser un instrument qui trisecte les angles.

1 Rappel sur les réels constructibles

Soit (O, I, J) un repère orthonormé du plan affine standard. On renvoie à [1] pour la définition précise d'un point constructible à la règle et au compas. On rappelle qu'un nombre réel est dit *constructible à la règle et au compas* (ou seulement *constructible*) si c'est l'abscisse d'un point constructible. L'ensemble des nombres constructibles est en fait un sous-corps de $\mathbb{R}$ stable par racine carrée. C'est même le plus petit comme le montre le théorème fondamental suivant.

Théorème 1. *Un nombre réel x est constructible si, et seulement s'il existe des corps $\mathbb{Q} = K_0 \subset K_1 \subset K_2 \subset \cdots \subset K_n \subset \mathbb{R}$ avec $x \in K_n$ et $[K_{i+1} : K_i] = 2$ pour tout i.*

2 Avec des outils supplémentaires

Le duplicateur de cube

Le duplicateur de cube est, par définition, un instrument qui fabrique, à partir d'un segment de longueur a, un segment de longueur $a \cdot \sqrt[3]{2}$. À partir de là, on définit naturellement la notion de point constructible à la règle, au compas et au duplicateur de cube. Les abscisses de ces points sont les nombres réels *constructibles au duplicateur de cube*. En copiant la preuve du théorème 1, on montre facilement la caractérisation suivante :

Théorème 2. *Un nombre réel x est constructible au duplicateur de cube si, et seulement s'il existe des corps $\mathbb{Q}[\sqrt[3]{2}] = K_0 \subset K_1 \subset K_2 \subset \cdots \subset K_n \subset \mathbb{R}$ avec $x \in K_n$ et $[K_{i+1} : K_i] = 2$ pour tout i.*

Le trisecteur d'angle

Intéressons-nous à présent au trisecteur d'angle. Comme son nom l'indique, c'est un outil qui permet de diviser un angle en trois angles de même mesure. Signalons tout de suite qu'un angle étant défini modulo 2π, son tiers est défini modulo $\frac{2\pi}{3}$. Ainsi, le trisecté d'un angle n'est pas uniquement déterminé, mais correspond à trois directions qui font entre elles des angles de $\frac{2\pi}{3}$. Comme $\cos(\frac{2\pi}{3}) = -\frac{1}{2}$ est clairement un réel constructible, ces trois directions sont constructibles dès lors que l'une d'entre elles l'est. Ainsi, on pourra au choix supposer que le trisecteur d'angle est un instrument qui fournit une seule de ces directions, ou alors les trois à la fois.

La notion de point constructible à la règle, au compas et au trisecteur d'angle, ainsi que celle de nombre réel constructible au trisecteur d'angle se définissent alors naturellement.

Théorème 3. *Un réel x est constructible au trisecteur d'angle si, et seulement s'il existe existe des corps $\mathbb{Q} = K_0 \subset K_1 \subset K_2 \subset \cdots \subset K_n \subset \mathbb{R}$ avec $x \in K_n$ et, pour tout $i \in \{0, \ldots, n-1\}$*

- *soit l'extension K_{i+1}/K_i est quadratique ;*
- *soit l'extension K_{i+1}/K_i est le corps de rupture d'un polynôme irréductible (sur K_i) de la forme $4X^3 - 3X - a$ avec $a \in K_i$ et $|a| < 1$.*

Démonstration. Tout d'abord, remarquons que quitte à reporter l'angle sur le cercle trigonométrique avant de le trisecter, on peut supposer que le trisecteur d'angle ne fonctionne qu'avec des angles de la forme $\widehat{IOM}$ où M a pour coordonnées $(\cos\alpha, \sin\alpha)$ avec $\alpha \in \mathbb{R}$. De plus, construire un trisecté de $\widehat{IOM}$ revient à construire le point N de coordonnées $(\cos(\frac{\alpha}{3}), \sin(\frac{\alpha}{3}))$. Finalement, $\cos(\frac{\alpha}{3})$ est racine du polynôme $4X^3 - 3X - \cos\alpha$.

Avec les remarques précédentes, la preuve se termine comme celle du théorème 1. □

3 Indépendance des instruments

Nous montrons finalement les deux théorèmes énoncés dans l'introduction de cette note. On commence par prouver que le trisecteur d'angle n'est d'aucune aide pour dupliquer le cube. Précisément :

Théorème 4. *Le nombre $\sqrt[3]{2}$ n'est pas constructible au trisecteur d'angle.*

Démonstration. Raisonnons par l'absurde. D'après le théorème 3, il existe alors une tour d'extensions $\mathbb{Q} = K_0 \subset K_1 \subset \cdots \subset K_n \subset \mathbb{R}$ avec $\sqrt[3]{2} \in K_n$ et pour tout $i \in \{0, \ldots, n-1\}$:

- soit l'extension K_{i+1}/K_i est quadratique ;
- soit l'extension K_{i+1}/K_i est le corps de rupture d'un polynôme de la forme $4X^3 - 3X - a$ avec $a \in K_i$ et $|a| \leq 1$.

Supposons en outre n minimal. Ceci implique que $\sqrt[3]{2} \notin K_{n-1}$. Soit P le polynôme minimal de $\sqrt[3]{2}$ sur K_{n-1} ; c'est un diviseur de $X^3 - 2$ qui n'est pas de degré 1 par ce qui précède. Il ne peut pas non plus être de degré 2. En effet, dans le cas contraire, on pourrait écrire $X^3 - 2 = P(X)Q(X)$ avec Q de degré 1, ce qui entrainerait l'existence dans K_{n-1} d'une racine de $X^3 - 2$. Or, par hypothèse, $K_{n-1} \subset \mathbb{R}$, et il est clair que la seule racine réelle de $X^3 - 2$ est $\sqrt[3]{2}$ qui, on l'a vu, n'est pas élément de K_{n-1}. Ainsi, P est de degré 3 et donc, nécessairement, $P(X) = X^3 - 2$.

Il en résulte que K_n est au moins de degré 3 sur K_{n-1} et donc que c'est le corps de rupture d'un polynôme (irréductible) de la forme $4X^3 - 3X - a$ avec $a \in K_{n-1}$ et $|a| < 1$. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = 4x^3 - 3x - a$. On a $\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = \pm\infty$ et $f(\pm\frac{1}{2}) = a \mp 1$. De $|a| < 1$, on déduit que f s'annule trois fois sur $\mathbb{R}$. Ainsi tous les morphismes de K_{n-1}-algèbres $K_n \to \mathbb{C}$ prennent leurs valeurs dans $\mathbb{R}$. Si on avait $\sqrt[3]{2} \in K_n$, on aurait $K_{n-1}[\sqrt[3]{2}] \subset K_n$. Comme ces deux corps sont de degré 3 sur K_{n-1}, il y aurait égalité. Mais alors, le morphisme de K_{n-1}-algèbres $K_n \to \mathbb{C}$, $\sqrt[3]{2} \mapsto j\sqrt[3]{2}$ ne prendrait pas ses valeurs dans $\mathbb{R}$. On a, à nouveau, une contradiction de laquelle découle le théorème. □

Maintenant la réciproque :

Théorème 5. *Soient A, B et C trois points constructibles à la règle et au compas. Le trisecté de l'angle $\widehat{BAC}$ est constructible à la règle et au compas, si et seulement s'il est constructible à la règle, au compas et au duplicateur de cube.*

Démonstration. Le sens direct est évident.

Pour la réciproque, quitte à reporter l'angle (opérateur clairement possible à la règle et au compas seuls), on peut supposer que $B = I$, $A = O$ et que C est un point du cercle trigonométrique ; notons $(\cos\alpha, \sin\alpha)$ ses coordonnées. D'après le théorème 1, il existe une tour d'extensions quadratiques $\mathbb{Q} = K_0 \subset K_1 \subset \cdots \subset K_n$ avec $a = \cos\alpha \in K_n$ et $K_n \subset \mathbb{R}$.

Pour $i \in \{0, 1, 2\}$, notons D_i le point de coordonnées $(\cos(\frac{\alpha+2\pi}{3}), \sin(\frac{\alpha+2\pi}{3}))$. Par hypothèse, l'un de ces points (et donc tous) est constructible à la règle, au compas et au duplicateur de cube. Ainsi, il existe une seconde tour d'extensions quadratiques $\mathbb{Q}[\sqrt[3]{2}] = L_0 \subset L_1 \subset \cdots \subset L_m$ avec $x_i = \cos(\frac{\alpha+2i\pi}{3}) \in L_m$ et $L_m \subset \mathbb{R}$. En regardant les extensions composées $K_n L_{m'}$ $(0 \leq m' \leq m)$, on montre qu'il existe une autre tour d'extensions quadratiques $K_n[\sqrt[3]{2}] = M_0 \subset M_1 \subset \cdots \subset M_s$ avec $x_i \in M_s$ et $M_s \subset \mathbb{R}$. Parmi toutes les tours précédentes (i étant susceptible de varier) choisissons-en une pour lequel s est minimal et notons j l'indice i correspondant.

Supposons $s > 0$. Notons P le polynôme minimal de x_j sur M_{s-1}. La minimalité de s assure que x_j n'appartient pas à M_{s-1}. Ainsi P est de degré au moins 2 et donc de degré 2 puisque l'extension M_s/M_{s-1} est quadratique. De plus, P est un diviseur de $Q(X) = 4X^3 - 3X - a = 4(X - x_0)(X - x_1)(X - x_2)$. Il s'ensuit que l'un des x_i — celui qui n'est pas racine de P — est élément de M_{s-1}, contredisant ainsi la minimalité de s. On en déduit $s = 0$, puis que tous les x_i sont dans $K_n[\sqrt[3]{2}]$. Par l'égalité des degrés, il vient $K_n[x_0] = K_n[\sqrt[3]{2}]$. On conclut alors comme dans la preuve du théorème précédent en montrant que tous les K_n-plongements complexes de $K_n[x_0]$ sont en fait réels, alors que ce n'est pas le cas pour $K_n[\sqrt[3]{2}]$. $\square$

Références

[1] Carrega J.C., *Théorie des corps : la règle et le compas*, Hermann 2001