Construction des foyers d'une ellipse à la règle et au compas

Michel Coste

27 juin 2007

Étant donné une ellipse tracée dans le plan, construire ses foyers à la règle et au compas.

1 Théorie

D'abord : pourquoi est-ce possible ? On applique ici le critère de constructibilité des nombres.

On peut se poser le problème de la façon suivante : étant donnés les coordonnées de cinq points choisis sur l'ellipse, peut-on construire les coordonnées des foyers ? Il suffit de voir quels calculs on a à faire. D'abord on calcule l'équation de l'ellipse à partir des coordonnées des cinq points. On peut supposer que le coefficient de x^2 dans l'équation est 1 puisqu'il s'agit d'une ellipse et que la partie homogène de degré deux de l'équation doit être définie. Les cinq autres coefficients s'obtiennent par la résolution du système linéaire de Cramer qui exprime que l'ellipse passe par les cinq points choisis. L'équation de l'ellipse est donc à coefficients dans le sous-corps K de $\mathbb{R}$ engendré par les coordonnées des cinq points choisis. Les coordonnées du centre se trouvent aussi en résolvant un système linéaire à coefficients dans K, donc il est à coordonnées dans K. On met ensuite l'équation de l'ellipse sous forme réduite dans un repère orthonormé (calculer la matrice de changement de base orthonormée), et on obtient les coordonnées des foyers à partir de l'équation réduite. Tout ceci se fait par résolution d'équations du second degré, donc par des sous-extensions de degré deux successives de K dans $\mathbb{R}$. Les coordonnées des foyers sont donc bien constructibles à partir de celles des cinq points.

2 Pratique

Maintenant : comment faire en pratique ? Je n'ai pas vu de référence précise (signalez-moi si vous en trouvez une), mais il y a un exercice du Berger qu'on peut utiliser : 17.9.22, Détermination d'une ellipse par deux demi-diamètres conjugués. Il faut déjà construire à la règle et au compas le centre et deux demi-diamètres conjugués de l'ellipse pour se mettre dans la situation de l'exercice (voir en fin de section des indications sur comment procéder). Ensuite on applique la construction donnée dans l'énoncé de l'exercice pour obtenir les axes de l'ellipse. Une fois qu'on a les axes, on a facilement les foyers : on trace le

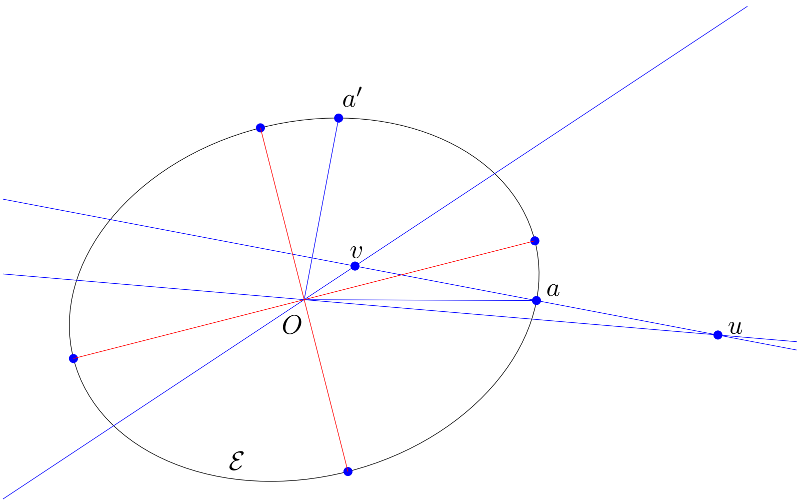

FIG. 1 – Construction des axes

cercle de centre une extrémité du petit axe et de rayon la moitié de la longueur du grand axe ; les foyers sont l'intersection de ce cercle avec le grand axe.

Il reste, pour justifier la construction, à faire l'exercice 17.9.22. Je rappelle brièvement la construction. On a comme données le centre O de l'ellipse et les deux extrémités a et a' de demi-diamètres conjugués (issus bien sûr de O). Sur la perpendiculaire à (Oa') passant par a, on place les deux points u et v dont la distance à a est égale à la distance entre O et a'. Les axes de l'ellipse sont les bissectrices de (Ou) et (Ov).

On peut s'en sortir en calculant. À similitude près on peut choisir un repére orthonormé pour avoir $O = (0,0)$, $a' = (1,0)$ et $a = (\alpha, \beta)$). Alors $u = (\alpha, \beta+1)$ et $v = (\alpha, \beta-1)$. Les pentes des bissectrices de (Ou) et (Ov) sont les solutions de l'équation (penser à la formule pour la tangente de la somme de deux angles) :

$$\frac{2t}{1-t^2} = \frac{\dfrac{\beta+1}{\alpha} + \dfrac{\beta-1}{\alpha}}{1 - \dfrac{(\beta+1)(\beta-1)}{\alpha^2}} .$$

Par ailleurs on sait que l'équation de l'ellipse dans le repère (non orthonormé !) $(O, \overrightarrow{Oa'}, \overrightarrow{Oa})$ est $x^2 + y^2 = 1$. À partir de ça on obtient l'équation dans le repère orthonormé choisi : c'est $q = 1$ où q est la forme quadratique de matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \alpha & \beta \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 & \alpha \\ 0 & \beta \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -\alpha\beta^{-1} \\ -\alpha\beta^{-1} & \beta^{-2}(1+\alpha^2) \end{pmatrix} .$$

Les pentes des axes s'obtiennent en cherchant à mettre la matrice de q sous forme diagonale par une rotation de matrice $\begin{pmatrix} c & -s \\ s & c \end{pmatrix}$, avec $t = s/c$. Le fait que

$$\begin{pmatrix} c & s \\ -s & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -\alpha\beta^{-1} \\ -\alpha\beta^{-1} & \beta^{-2}(1+\alpha^2) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c & -s \\ s & c \end{pmatrix}$$

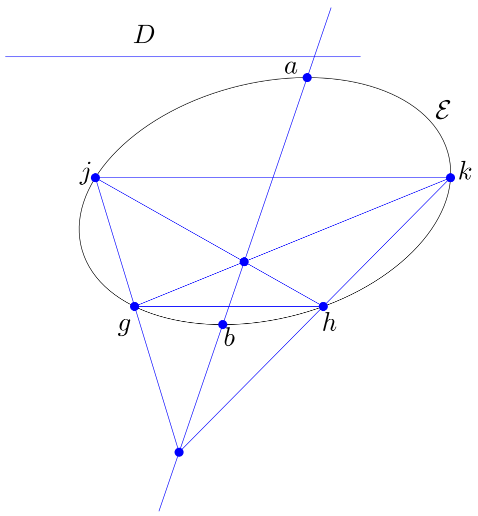

Fig. 2 – Construction d'un diamètre conjugué

soit diagonale se traduit par l'équation

$$(1-t^2)(-\frac{\alpha}{\beta}) = t(1-\frac{1+\alpha^2}{\beta^2})\ ,$$

et c'est bien la même équation du second degré en t que celle obtenue plus haut.

Pour conclure, indiquons comment construire le diamètre (ab) de l'ellipse conjugué à une direction D donnée. Ceci permettra de construire une paire de diamètres conjugués, et le centre comme intersection de ces diamètres.

On trace deux cordes (gh) et (jk) parallèles à D. La droite qui joint les points $(gk) \cap (hj)$ et $(gj) \cap (hk)$ coupe l'ellipse suivant le diamètre (ab). Ceci marche bien pour un cercle (où le diamètre conjugué à une direction est le diamètre orthogonal à celle-ci), et on passe du cercle à l'ellipse par une affinité. On aurait pu aussi construire (ab) comme la droite joignant les milieux des segments $[gh]$ et $[jk]$.

3 Compléments

Cette partie vient d'une discussion avec Baptiste Devyver, que je remercie. Elle porte sur deux points :

1. Une autre construction des axes de l'ellipse figure dans le livre de M. Berger (16.3.10.2) et m'a été signalée par B. Devyver.
2. Dans les constructions on utilise le tracé de l'ellipse dans le plan, alors que la partie « théorie » part de cinq points dans le plan définissant l'ellipse. La question qui se pose est la construction à la règle et au compas des

deux points d'intersection d'une droite $\mathcal{D}$ avec une ellipse $\mathcal{E}$ donnée par cinq points

On utilise du matériel de géométrie projective que l'on va décrire.

3.1 Homographies involutives

Une homographie involutive sur une droite projective ou sur une conique est une homographie $h \neq \mathrm{Id}$ telle que $h^2 = \mathrm{Id}$.

Un exemple d'homographie involutive sur une droite projective $\mathcal{D}$ est donné par la conjugaison par rapport à une conique $\mathcal{C}$ à laquelle $\mathcal{D}$ n'est pas tangente. Elle fait correspondre à un point M sur $\mathcal{D}$ le point M' conjugué de M sur $\mathcal{D}$ par rapport à $\mathcal{C}$. On peut remonter au plan vectoriel P dont la droite $\mathcal{D}$ est l'espace projectif associé : l'équation de la conique $\mathcal{C}$ donne en restriction à P une forme quadratique q non dégénérée (la non dégénérescence correspond au fait que $\mathcal{D}$ n'est pas tangente à $\mathcal{C}$), et la droite vectorielle associée à M' est l'orthogonal pour q de la droite vectorielle associée à M. On peut choisir une base de P orthogonale pour q, dans laquelle q s'écrit (à un facteur constant non nul près) $x^2 - c\,y^2$; en utilisant l'abscisse projective $z = \dfrac{x}{y}$ sur $\mathcal{D}$, la conjugaison $M \mapsto M'$ s'écrit $z \mapsto \dfrac{c}{z}$.

Donnons nous une ellipse dans un plan affine réel. Rappelons que les points de la droite de l'infini du plan projectif complété du plan affine correspondent aux directions de droites dans le plan affine. Le passage d'une direction à la direction conjuguée par rapport à l'ellipse est une homographie involutive sur la droite de l'infini.

Une conique propre $\mathcal{C}$ a une structure de droite projective obtenue par bijection avec le faisceau de droites issues d'un point A de $\mathcal{C}$ (à une droite $\mathcal{D}$ du faisceau correspond le deuxième point d'intersection de $\mathcal{D}$ avec $\mathcal{C}$). Ceci permet de parler d'homographie involutive sur une conique. Ces homographies involutives ont une description géométrique simple, donnée par le

Théorème de Frégier. *Soit $\mathcal{C}$ une conique propre, Ω un point qui n'est pas sur $\mathcal{C}$. L'application qui à $M \in \mathcal{C}$ fait correspondre le deuxième point M' d'intersection de la droite (ΩM) avec $\mathcal{C}$ est une homographie involutive sur $\mathcal{C}$. Toute homographie involutive sur $\mathcal{C}$ s'obtient de cette manière. On appelle Ω le point de Frégier de l'homographie involutive.*

Des références pour ceci : Berger, Géométrie, 16.3.6 ; Samuel, Géométrie projective, p. 86 ; Sidler, Géométrie projective, p. 56 ; Fresnel, Méthodes modernes en géométrie, exercice p. 115-116.

3.2 Une autre construction des axes (et des foyers)

Revenons au plan euclidien et à la construction des foyers d'une ellipse $\mathcal{E}$ à la règle et au compas. On a vu qu'elle se ramenait à la construction des axes de $\mathcal{E}$. M. Berger donne en 16.3.10.2 une autre construction des axes à partir de deux paires de diamètres conjugués (voir plus haut comment construire ces données). La conjugaison des diamètres donne une homographie involutive sur le faisceau de droites passant par le centre O de $\mathcal{E}$, qu'on peut transporter en une homographie involutive sur un cercle $\mathcal{C}$ de centre I passant par O. Les deux paires

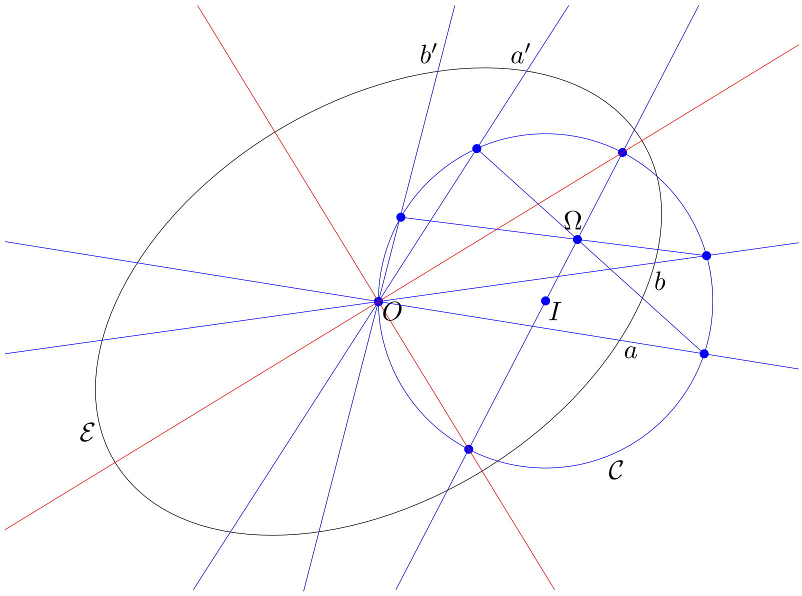

FIG. 3 – Deuxième construction des axes

de diamètres conjugués permettent de construire le point de Frégier Ω de cette homographie involutive. Les axes sont des diamètres conjugués orthogonaux. On les obtient donc en trouvant deux points sur $\mathcal{C}$ diamétralement opposés et se correspondant par l'homographie involutive : ce sont les points d'intersection de (ΩI) avec $\mathcal{C}$.

3.3 Construction à partir de cinq points définissant l'ellipse

Ce qu'il faut savoir faire pour reprendre les constructions données jusqu'ici au moyen du tracé de l'ellipse, c'est la construction à la règle et au compas des deux points d'intersection d'une droite $\mathcal{D}$ avec une ellipse $\mathcal{E}$ donnée par cinq points A_1, A_2, A_3, A_4, A_5.

Étant donné un point M, le théorème de Pascal permet de construire (à la règle seule) le deuxième point d'intersection de la droite (A_iM) avec l'ellipse. Ceci suffit pour construire, à partir d'un point M sur $\mathcal{D}$, son conjugué M' sur $\mathcal{D}$ par rapport à $\mathcal{E}$ (toujours à la régle seule). On aura besoin du compas pour trouver les points fixes de la conjugaison, qui sont les points d'intersection de $\mathcal{D}$ avec $\mathcal{E}$ (s'ils existent).

On peut transporter, par projection centrale de centre un point O hors de $\mathcal{D}$, l'homographie involutive sur $\mathcal{D}$ donnée par la conjugaison par rapport à $\mathcal{E}$ en une homographie involutive sur un cercle $\mathcal{C}$ passant par O. Deux paires (M, M') et (N, N') de points conjugués sur $\mathcal{D}$ donnent deux paires de points sur $\mathcal{C}$ qui permettent de déterminer le point de Frégier Ω de l'homographie involutive sur

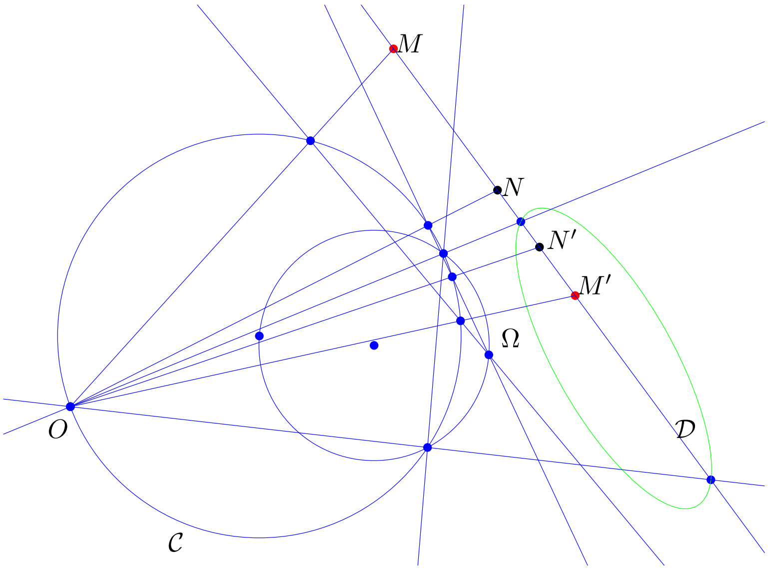

Fig. 4 – Construction des points fixes de la conjugaison

$\mathcal{C}$. Les points fixes de cette homographie involutive sont les points de contact des tangentes à $\mathcal{C}$ issues de Ω. En projetant sur $\mathcal{D}$ depuis O, on trouve les points fixes pour la conjugaison, c.-à-d. les points d'intersection de $\mathcal{D}$ avec $\mathcal{E}$.

Remarquons qu'on ne peut pas effectuer cette construction des points fixes de la conjugaison si les segments $[MM']$ et $[NN']$ se coupent sans que l'un soit contenu dans l'autre (dans ce cas Ω est à l'intérieur du cercle). C'est ce qui se passe pour une droite qui ne coupe pas l'ellipse.