Université de Rennes 1 – Préparation
à l'agrégation de mathématiques
http://agreg-maths.univ-rennes1.fr

Coniques, quadriques projectives

Michel Coste

Version revue, Février 2004

Introduction

Les coniques et quadriques projectives ne figurent pas dans le programme de l'agrégation. Alors, pourquoi en parler ?

1. On ne peut bien comprendre les quadriques et coniques affines que si on connaît le versant projectif de l'histoire. Certaines notions (par exemple la notion de quadrique ou conique non dégénérée) se lisent naturellement dans le projectif, et moins naturellement dans l'affine. La classification affine des coniques ou quadriques s'éclaire vraiment quand on la rapproche de la classification projective.
2. Les quadriques fournissent une illustration géométrique des notions et résultats de la théorie des formes quadratiques. C'est dans le cadre projectif que le dictionnaire formes quadratiques/quadriques fonctionne vraiment. Ainsi on pourra donner des illustrations géométriques vraiment consistantes des thèmes abordés dans la leçon « Formes quadratiques. Applications » en se plaçant dans le cadre projectif. En particulier les quadriques projectives permettents d'illustrer les notions de noyau d'une forme quadratique, d'isotropie et de sous-espaces totalement isotropes, d'orthogonalité par rapport à une forme quadratique. . .
3. Quelques belles propriétés des coniques (birapport de 4 points sur une conique, théorèmes de Pascal et Brianchon) relèvent du cadre projectif. Elles agrémentent une leçon sur les coniques.

Les références utilisées (volontairement limitées) sont les livres de Michèle Audin [Aud], de Marcel Berger [Ber], de Pierre Samuel [Sam]. Les deux premiers contiennent des rappels de la théorie des formes quadratiques ; le troisième est spécialisé dans la géométrie projective. Il ne faut pas prendre le texte qui suit comme un cours complet sur les quadriques et coniques projectives, mais plutôt comme un résumé et guide de lecture.

La dernière section de ce texte, intitulée « Compléments » et ajoutée dans cette nouvelle version, est de nature différente : elle contient quelques résultats qui ne se trouvent pas tels quels dans les ouvrages mentionnés ci-dessus. On en donne donc des démonstrations complètes. Le complément sur la comparaison entre classifications affine et projective demande un peu de familiarité avec la théorie des formes quadratiques.

Dans tout ce qui suit $\mathbb{K}$ est un corps de caractéristique différente de deux.

1 Quadriques affines et projectives

On définit les quadriques affines à partir de leurs équations : une quadrique affine de $\mathbb{K}^n$ est un polynôme du second degré (exactement) à coefficients dans $\mathbb{K}$ en n variables, à un facteur constant non nul près ; l'ensemble des points de $\mathbb{K}^n$ qui vérifient cette équation est *l'image de la quadrique* ([Aud] p. 171, [Ber] 15.5.1).

De même on définit les quadriques projectives par leurs équations : une quadrique projective de $\mathbb{P}_n(\mathbb{K})$ est une forme quadratique non nulle en $n+1$ variables $Q(x_1, \ldots, x_{n+1})$ à coefficients dans $\mathbb{K}$, à un facteur constant non nul près ; l'image de la quadrique est l'ensemble des points $(x_1 : \ldots : x_{n+1})$ de $\mathbb{P}_n(\mathbb{K})$ tels que $Q(x_1, \ldots, x_{n+1}) = 0$ ([Aud] p. 185, [Ber] 14.1.1).

Bien sûr une conique (affine ou projective) est une quadrique dans un plan.

Examinons maintenant le rapport affine/projectif. On plonge $\mathbb{K}^n$ dans $\mathbb{P}_n(\mathbb{K})$ par

$$(x_1, \ldots, x_n) \longmapsto (x_1 : \ldots : x_n : 1) ,$$

et on identifie ainsi $\mathbb{K}^n$ au complémentaire de « l'hyperplan à l'infini » $x_{n+1} = 0$ dans $\mathbb{P}_n(\mathbb{K})$. Soit α une quadrique affine de $\mathbb{K}^n$ d'équation :

$$f(x_1, \ldots, x_n) = q(x_1, \ldots, x_n) + \ell(x_1, \ldots, x_n) + c ,$$

où q est une forme quadratique non nulle, ℓ une forme linéaire et c une constante. La forme quadratique homogénéisée de f est :

$$Q(x_1, \ldots, x_n, x_{n+1}) = q(x_1, \ldots, x_n) + \ell(x_1, \ldots, x_n)x_{n+1} + cx_{n+1}^2 .$$

On a $f(x_1, \ldots, x_n) = 0$ si et seulement si $Q(x_1, \ldots, x_n, 1) = 0$, donc l'image de la quadrique affine α est l'intersection de l'image de la quadrique projective $\widetilde{\alpha}$ d'équation Q (homogénéisée de f) avec $\mathbb{K}^n$. Dans l'autre sens, si l'on part d'une quadrique projective d'équation $Q(x_1, \ldots, x_{n+1}) = 0$ que l'on déshomogénéise en $Q(x_1, \ldots, x_n, 1) = 0$, on obtient une quadrique affine de $\mathbb{K}^n$, à condition que le polynôme déshomogénéisé soit effectivement du second degré, c'est-à-dire que x_{n+1} ne divise pas Q (la quadrique projective ne contient pas l'hyperplan à l'infini). En conclusion le passage $\alpha \mapsto \widetilde{\alpha}$ donné par l' homogénéisation permet l'identification des quadriques affines avec les quadriques projectives ne contenant pas l'hyperlan à l'infini (15.1.3.2 dans [Ber], page 185 dans [Aud]).

Voyons maintenant l'écriture matricielle des quadriques, en nous limitant aux cas des coniques (on utilisera x, y, z plutôt que x_1, x_2, x_3). Une équation de conique affine

$$ax^2 + 2bxy + cy^2 + 2dx + 2ey + f$$

peut se réécrire matriciellement

$$\begin{pmatrix} x & y & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b & d \\ b & c & e \\ d & e & f \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} .$$

L'équation homogénéisée de la conique projective est bien sûr

$$\begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b & d \\ b & c & e \\ d & e & f \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} .$$

Avec les notations ci-dessus, on a, associées à une équation de conique affine, les deux formes quadratiques

$$q \text{ de matrice } \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad Q \text{ de matrice } \begin{pmatrix} a & b & d \\ b & c & e \\ d & e & f \end{pmatrix} .$$

Deux remarques :

– Les définitions de quadrique posent naturellement la question : est-ce que l'image d'une quadrique détermine celle-ci (détermine son équation à un facteur constant près). On peut trouver des réponses : Théorème 46 p. 113 de [Sam] ou 14.1.6 dans [Ber]. Notons que les coniques affines $x^2 + y^2 + 1 = 0$ et $x^2 + y^2 + 2 = 0$ ont même image dans $\mathbb{R}^2$ (le vide), mais ne sont pas les mêmes (une équation n'est pas multiple de l'autre par une constante) ; les images dans $\mathbb{C}^2$ sont différentes.

– Les formes quadratiques en $n + 1$ variables forment un espace vectoriel de dimension $(n + 1)(n + 2)/2$ (penser aux matrices symétriques). Donc les quadriques de $\mathbb{P}_n(\mathbb{K})$ forment naturellement un espace projectif de dimension $((n + 1)(n + 2)/2) - 1 = n(n + 3)/2$. Par contre les quadriques affines ne forment pas naturellement un espace affine ou projectif. Un point pour le projectif !

En lien avec la deuxième remarque ci-dessus, un fait qui doit certainement figurer dans une leçon sur les coniques : par cinq points du plan il passe toujours une conique, et en général (précisément, sauf si quatre points parmi les cinq sont alignés) une seule. Le raisonnement dans le cadre projectif est très simple. Une forme quadratique en trois variables est donnée par six coefficients (a, b, c, d, e, f ci-dessus). La condition pour la conique de passer par un point se traduit par une équation linéaire homogène (sans second membre) sur ces six coefficients. Or un système de cinq équations linéaires homogènes en six variables a toujours une solution non triviale (différente de 0) ; et quand le rang est cinq, il y a une droite vectorielle de solutions (ce qui fait bien une unique quadrique projective). Voir le corollaire 3.9 dans [Aud] (pour les quadriques), ou 16.1.4 dans [Ber] (où l'on demande en plus que la conique soit propre, voir plus bas), ou le théorème 17 p. 62 dans [Sam].

2 Intersection d'une droite avec une quadrique, tangence

Voir ici [Aud] p. 185-186. Soient $M = (x_1 : \ldots : x_{n+1})$ et $N = (y_1 : \ldots : y_{n+1})$ deux points distincts de $\mathbb{P}_n(\mathbb{K})$. On note $\underline{x} = (x_1, \ldots, x_{n+1})$ et $\underline{y} = (y_1, \ldots, y_{n+1})$ les coordonnées homogènes. On peut paramétrer la droite projective MN par $\lambda\underline{x} + \mu\underline{y}$ ou par $\underline{x} + t\underline{y}$. Précisons : les coordonnées homogènes $\lambda\underline{x} + \mu\underline{y}$ et $\lambda'\underline{x} + \mu'\underline{y}$ donnent le même point de la droite projective MN si et seulement si $(\mu : \lambda) = (\mu' : \lambda')$ dans $\mathbb{P}_1(\mathbb{K})$; le paramétrage par l'abscisse projective $t = \mu/\lambda$ donne le point M pour $t = \infty$. Pour trouver l'intersection de MN avec (l'image de) la quadrique projective d'équation Q, on rentre simplement la paramétrisation dans Q :

$$Q(\lambda\underline{x} + \mu\underline{y}) = \lambda^2 Q(\underline{x}) + 2\lambda\mu B(\underline{x}, \underline{y}) + \mu^2 Q(\underline{y}) = 0 \ ,$$

où B est la forme polaire de la forme quadratique Q. On obtient une forme quadratique en λ, μ et on a donc

– une intersection vide si cette forme est irréductible,

– deux points d'intersection distincts si cette forme factorise en deux formes linéaires non proportionnelles,

– un point double d'intersection si cette forme est une constante non nulle fois le carré d'une forme linéaire non nulle.

– La droite est contenue dans la quadrique si cette forme est identiquement nulle.

La droite MN est tangente à la quadrique si elle la rencontre en un point double ou si elle est contenue dedans.

Fixons un point M_0 de coordonnées homogènes $\underline{x}_0$ sur la quadrique ($Q(\underline{x}_0) = 0$). L'intersection de la droite M_0M avec la quadrique est donnée par

$$\mu(2\lambda B(\underline{x}_0, x) + \mu Q(\underline{x})) = 0 \ ,$$

et donc cette droite est tangente à la quadrique d'équation Q si et seulement si $B(\underline{x}_0, \underline{x}) = 0$ (autrement dit, $\underline{x}$ est orthogonal à $\underline{x}_0$ pour Q). Si $\underline{x}_0$ n'est pas dans le noyau de la forme quadratique Q, l'orthogonal de $\underline{x}_0$ est l'hyperplan de $\mathbb{K}^{n+1}$ qui a pour équation la forme linéaire $\underline{x} \mapsto B(\underline{x}_0, \underline{x})$. L'hyperplan tangent à la quadrique en M_0 est l'hyperplan projectif $\mathbb{P}((\underline{x}_0)^\perp)$.

Voyons ce qui se passe de façon matricielle pour une conique (on reprend les notations utilisées plus haut). La tangente à la conique en $M_0 = (x_0 : y_0 : z_0)$ est la droite d'équation

$$\begin{pmatrix} x_0 & y_0 & z_0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b & d \\ b & c & e \\ d & e & f \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0 \ .$$

Vérifions que ça colle bien avec ce qu'on apprend en géométrie différentielle quant au calcul de la tangente à la courbe donnée dans $\mathbb{R}^2$ par l'équation implicite

$$f(x, y) = ax^2 + 2bxy + cy^2 + 2dx + 2ey + f = 0 \ .$$

La tangente en un point (x_0, y_0) de cette conique affine est la droite d'équation :

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)(x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)(y - y_0) \\ &= 2\big((ax_0 + by_0 + d)x + (bx_0 + cy_0 + e)y - (ax_0^2 + 2bx_0y_0 + cy_0^2 + dx_0 + ey_0)\big) \ . \end{aligned}$$

En divisant par 2 en en utilisant $ax_0^2 + 2bx_0y_0 + cy_0^2 + 2dx_0 + 2ey_0 + f = 0$, l'équation se réécrit bien

$$\begin{pmatrix} x_0 & y_0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b & d \\ b & c & e \\ d & e & f \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} = 0 \ .$$

Ce qui a été fait ci-dessus suppose que $\underline{x}_0$ n'est pas dans le noyau. Si $\underline{x}_0$ est dans le noyau, on dit que M_0 est un point singulier. Vérifier dans le cadre affine : $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ est un point singulier de la conique $f(x, y) = 0$ si et seulement si $f(x_0, y_0) = 0$ et les dérivées partielles de f s'annulent en (x_0, y_0).

Une quadrique projective est dite *non dégénérée* (ou *propre*) si et seulement si elle a une équation Q non dégénérée (la matrice de Q est inversible). Ceci revient à dire que le noyau de Q est réduit à $\{0\}$, autrement dit que la quadrique n'a pas de point singulier. Une quadrique affine α est dite non dégénérée si et seulement si son homogénéisée $\widetilde{\alpha}$ est non dégénérée. Remarquer qu'on peut très bien avoir une conique affine non dégénérée avec une forme q (dans les notations du début) dégénérée (exemple : la parabole $x^2 - y$) et une conique affine dégénérée avec la forme q non dégénérée (exemple : $x^2 - y^2$ - le point singulier est l'intersection des deux droites). Voir aussi la discussion p. 171 dans [Aud].

Dans [Sam], on peut voir p. 26-29 une discussion des problèmes de points singuliers et d'hyperplans tangents dans le cadre plus général des hypersurfaces algébriques (de degré quelconque). On y voit en particulier (p. 29) l'utilité de la formule d'Euler, qu'on aurait pu utiliser dans le calcul concernant la tangente à une conique.

3 Polarité par rapport à une quadrique

C'est le pendant géométrique de la notion d'orthogonalité pour une forme quadratique. On fixe une quadrique projective α non dégénérée de $\mathbb{P}_n(\mathbb{K})$ d'équation Q. Soit B la forme polaire de Q.

Deux points M de coordonnées homogènes $\underline{x}$ et N de coordonnées homogènes $\underline{y}$ de $\mathbb{P}_n(\mathbb{K})$ sont dits *conjugués par rapport à la quadrique* α si et seulement si $B(\underline{x}, \underline{y}) = 0$. L'ensemble des conjugués de M est l'hyperplan $\mathbb{P}(\underline{x}^\perp)$ de $\mathbb{P}_n(\mathbb{K})$. On l'appelle *l'hyperplan polaire de* M par rapport à α. D'après la discussion que nous avons menée dans la partie précédente, si le point M est sur la quadrique, l'hyperplan polaire de M est l'hyperplan tangent à la quadrique en M. Matriciellement et pour une conique, la droite polaire du point $M_0 = (x_0 : y_0 : z_0)$ est la droite d'équation

$$\begin{pmatrix} x_0 & y_0 & z_0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b & d \\ b & c & e \\ d & e & f \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0 \, .$$

La polarité peut se voir de la manière suivante : la forme bilinéaire symétrique non dégénérée B induit un isomorphisme $\varphi_B : \mathbb{K}^{n+1} \to (\mathbb{K}^{n+1})^*$, défini par $\varphi_B(\underline{x})(\underline{y}) = B(\underline{x}, \underline{y})$. On obtient donc un isomorphisme $\mathbb{P}(\varphi_B)$ de l'espace projectif $\mathbb{P}_n(\mathbb{K})$ sur l'espace projectif dual $\mathbb{P}_n(\mathbb{K})^* = \mathbb{P}((\mathbb{K}^{n+1})^*)$. Rappelons qu'un point de $\mathbb{P}_n(\mathbb{K})^*$ s'identifie canoniquement à un hyperplan de $\mathbb{P}_n(\mathbb{K})$: à la classe d'une forme linéaire $f \in (\mathbb{K}^{n+1})^*$ correspond l'hyperplan $\mathbb{P}(\ker(f))$. Moyennant cette identification, l'hyperplan polaire de M est $\mathbb{P}(\varphi_B)(M)$. La polarité $\mathbb{P}(\varphi_B)$ réalise donc une bijection entre points de $\mathbb{P}_n(\mathbb{K})$ et hyperplans de $\mathbb{P}_n(\mathbb{K})$. Le *pôle* d'un hyperplan projectif H est le point $\mathbb{P}(\varphi_B)^{-1}(H)$.

Voyons maintenant le lien entre la polarité et la division harmonique. Soient M et N deux points distincts de $\mathbb{P}_n(\mathbb{K})$ qui n'appartiennent pas à l'image de la quadrique, et supposons que la droite MN coupe la quadrique en deux points distincts U et V. Alors M et N sont conjugués si et seulement si M, N, U, V sont en division harmonique (ce qui veut dire que le birapport $[M, N, U, V]$ vaut -1).

Sur ce qui précède on peut voir [Aud] p. 187-188, [Ber] 14.5.1-2 ou [Sam] p. 126-127.

La polarité permet de fabriquer *l'équation tangentielle d'une quadrique*. Voyons le cas d'une conique (non dégénérée), et notons M la matrice de la forme quadratique Q. Le pôle de la droite projective D d'équation $ux+vy+wz = 0$ est le point de coordonnées homogènes données par $(u\ v\ w)M^{-1}$. La droite D est tangente à la conique si et seulement si son pôle est sur la conique, ou encore si et seulement si le pôle de D appartient à D (vérifier). Donc D est tangente à la conique si et seulement si

$$\begin{pmatrix} u & v & w \end{pmatrix} M^{-1} \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} = 0 \, .$$

C'est ce qu'on appelle l'équation tangentielle de la conique. Elle définit une conique dans le plan projectif dual. Par exemple, la droite affine $ux + vy + w = 0$ est tangente à l'ellipse $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} - 1 = 0$ si et seulement si $a^2u^2 + b^2v^2 - w^2 = 0$.

L'équation tangentielle est traitée dans [Sam] p. 136, dans [Ber] 14.6 et pas très explicitement dans l'exercice VI.62 p. 218 de [Aud].

La polarité permet aussi de rendre compte d'un phénomène typiquement affine : l'existence de centre pour une quadrique. On considère une quadrique affine non dégénérée α et son homogénéisée projective $\widetilde{\alpha}$. Alors le centre de α est le pôle de l'hyperplan à l'infini relativement à $\widetilde{\alpha}$, si ce pôle n'est pas lui-même à l'infini. Les quadriques sans centre (appelées paraboloïdes) sont donc celles qui sont tangentes à l'hyperplan à l'infini. Le rapport entre polarité et division harmonique montre que le centre de α est bien centre de symétrie de la quadrique affine. Pour cet éclairage projectif du centre, voir [Aud] bas de p. 195 (cas d'une conique), [Sam] p. 127-128, [Ber] 15.5.2-3.

4 Classification des quadriques projectives

Le groupe projectif $\mathrm{PGL}_{n+1}(\mathbb{K})$ agit sur l'ensemble des quadriques de $\mathbb{P}_n(\mathbb{K})$. Etant donné une homographie $\mathrm{PGL}_{n+1}(\mathbb{K})$ et une quadrique α de $\mathbb{P}_n(\mathbb{K})$ d'équation Q, la quadrique $\mathbb{P}(f) \cdot \alpha$ a pour équation $Q \circ f^{-1}$. Noter que l'image de la quadrique $\mathbb{P}(f) \cdot \alpha$ est l'image par $\mathbb{P}(f)$ de l'image de la quadrique α. La classification projective des quadriques est le problème de la détermination des orbites de cette action.

Deux quadriques d'équations Q et Q' sont projectivement équivalentes (dans la même orbite) si et seulement s'il existe un scalaire non nul λ tel que Q et $\lambda Q'$ soient isométriques. La classification des quadriques projectives se ramène donc pratiquement à celle des formes quadratiques. Explicitons ce qui se passe pour $K = \mathbb{C}$ et $K = \mathbb{R}$. Ceci est traité rapidement dans [Aud] p. 189, dans [Ber] 14.1.5, dans [Sam] p. 119. Dans [Sam] on trouve aussi la classification des coniques ou quadriques sur un corps fini (p. 122-125).

4.1 Quadriques projectives complexes

Les quadriques projectives sur $\mathbb{C}$ sont classifiées par leur rang. En particulier, il y a une seule classe de quadrique non dégénérée dans $\mathbb{P}_n(\mathbb{K})$.

4.2 Quadriques projectives réelles

On sait que les formes quadratiques sur $\mathbb{R}$ sont classifiées par leur signature. Si on multiplie une forme quadratique de signature (s,t) par un scalaire négatif, on obtient une forme de signature (t,s). Donc les quadriques projectives sur $\mathbb{R}$ sont classifiées par la signature de leur équation, à l'échange $(s,t) \mapsto (t,s)$ près. On peut donc ne considérer que les signatures (s,t) avec $s \geq t$.

Pour $n = 2$ il y a 5 classes de coniques projectives, dont 2 de non dégénérées :

- la conique vide dont l'équation peut se mettre sous la forme $x^2 + y^2 + z^2 = 0$ dans un repère (signature $(3,0)$),
- la conique non vide dont l'équation peut se mettre sous la forme $x^2 + y^2 - z^2 = 0$ (signature $(2,1)$).

Du point de vue topologique la conique non vide est homéomorphe à un cercle : la droite $z = 0$ ne la coupe pas, en on retrouve en déshomogénéisant l'équation $x^2 + y^2 - 1 = 0$ dans le plan affine.

Les 3 classes de coniques projectives dégénérées sur $\mathbb{R}$ correspondent aux signatures $(2,0)$, $(1,1)$ et $(1,0)$ (les identifier).

Pour $n = 3$ il y a 8 classes de quadriques dans $\mathbb{P}^3(\mathbb{R})$, dont 3 de non dégénérées :

- La quadrique vide dont l'équation peut se mettre sous la forme $x^2 + y^2 + z^2 + t^2 = 0$ (signature $(4,0)$),
- La quadrique dont l'équation peut se mettre sous la forme $x^2 + y^2 + z^2 - t^2 = 0$ (signature $(3,1)$),

– La quadrique dont l'équation peut se mettre sous la forme $x^2 + y^2 - z^2 - t^2 = 0$ (signature $(2, 2)$).

Du point de vue topologique, (l'image de) la quadrique de signature $(3, 1)$ est homéomorphe à une sphère. Prenons le plan $t = 0$ comme plan à l'infini ; il ne coupe pas la quadrique. Dans l'espace affine complémentaire, on trouve une surface d'équation $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, homéomorphe à une sphère.

L'image de la quadrique de signature $(2, 2)$ contient des droites, en fait deux familles de droites. Explicitons-les. Ceci nous donnera la topologie de cette image. Pour cela il est plus commode de mettre l'équation sous la forme $x_1x_2 = x_3x_4$, au moyen du changement de coordonnées homogènes $x_1 = x - z$, $x_2 = x + z$, $x_3 = t - y$, $x_4 = t + y$. Prenons λ et μ (resp. ρ et θ) des réels pas tous les deux nuls. Les droites projectives

$$D_{\lambda,\mu} \quad \begin{cases} \lambda x_1 = \mu x_3 \\ \mu x_2 = \lambda x_4 \end{cases} \qquad \text{et} \qquad E_{\rho,\theta} \quad \begin{cases} \rho x_1 = \theta x_4 \\ \theta x_2 = \rho x_3 \end{cases}$$

sont contenues dans l'image de la quadrique, et se coupent en un point de la quadrique. Remarquez que $D_{\lambda,\mu}$ ne change pas si on multiplie λ et μ par le même scalaire non nul ; donc $D_{\lambda,\mu}$ ne dépend que du point $(\lambda : \mu)$ de $\mathbb{P}_1(\mathbb{R})$, et de même pour $E_{\rho,\theta}$. L'application de $\mathbb{P}_1(\mathbb{R}) \times \mathbb{P}_1(\mathbb{R})$ dans l'image de la quadrique définie par

$$\big((\lambda : \mu), (\rho : \theta)\big) \longmapsto D_{\lambda,\mu} \cap E_{\rho,\theta} = (\mu\theta : \lambda\rho : \lambda\theta : \rho\mu)$$

est une bijection, et c'est même un homéomorphisme. Puisque $\mathbb{P}_1(\mathbb{R})$ est homéomorphe à un cercle et que le produit de deux cercles est homéomorphe à un tore, la quadrique projective réelle de signature $(2, 2)$ est homéomorphe à un tore. Vous pouvez vérifier les affirmations ci-dessus, ou regarder ce qui est dit dans [Sam] p. 120-121 ou dans [Ber] 14.4.

L'existence de droites dans l'image de la quadrique d'équation Q revient à l'existence de plans totalement isotropes pour Q. De manière générale, si $d + 1$ est la dimension des sous-espaces totalement isotropes maximaux (ce qu'on appelle l'indice de la forme quadratique), alors d est la dimension maximale des sous-espaces projectifs contenus dans l'image de la quadrique. L'indice d'une forme quadratique réelle non dégénérée de signature (s, t) est $\min(s, t)$ (on peut voir sur ce sujet le tome d'algèbre de Gourdon, p. 234-235).

5 Classification projective et classification affine

Reprenons les notations de la première partie de ce texte. À une quadrique affine α d'équation f et on fait correspondre une quadrique projective $\widetilde{\alpha}$ d'équation Q homogénéisée de f. Par ailleurs la forme quadratique en n variables q (partie homogène de second degré de f) définit une quadrique $\overrightarrow{\alpha}$, intersection de $\widetilde{\alpha}$ avec l'hyperplan à l'infini $x_{n+1} = 0$ (les notations α agrémentées d'accessoires divers sont celles de [Ber]). Le problème de la classification affine des quadriques est de déterminer les orbites de l'action du groupe affine $\mathrm{GA}(\mathbb{K}^n)$ agissant sur l'ensemble des quadriques affines de X. La classification affine est traitée dans [Ber] 15.2-3 et dans [Sam] p. 116-119. Rappelons qu'une transformation affine de $\mathbb{K}^n$ s'étend de manière unique en une homographie de $\mathbb{P}_n(\mathbb{K})$ laissant invariant l'hyperplan à l'infini, et qui induit donc une homographie de cet l'hyperplan à l'infini (on peut voir [Aud] p. 148-149, [Sam] p. 23, [Ber] 5.2.2). On en déduit que si deux quadriques affines α et α' sont affinement équivalentes, alors les quadriques projectives $\widetilde{\alpha}$ et $\widetilde{\alpha}'$ sont projectivement équivalentes, de même que les quadriques à l'infini $\overrightarrow{\alpha}$ et $\overrightarrow{\alpha}'$. La réciproque est vraie, on en donne une démonstration dans la section 7.3 de ce texte. Nous allons voir ici, sur l'exemple des coniques réelles et des quadriques réelles dans l'espace de dimension 3 (non dégénérées, non vides), que la classification affine des quadriques α revient bien à la classification projective du couple $(\widetilde{\alpha}, \overrightarrow{\alpha})$.

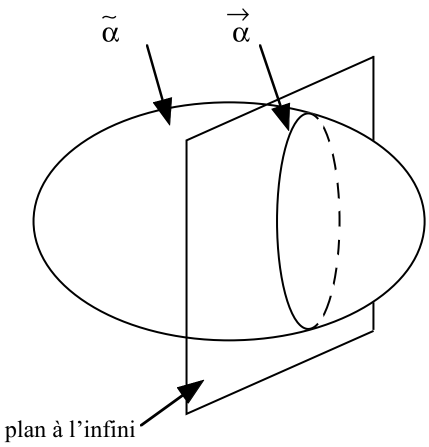
Voici d'abord pour les coniques (voir [Aud] p. 195 avec des dessins, [Sam] p. 120, [Ber] 15.3.3.2) :

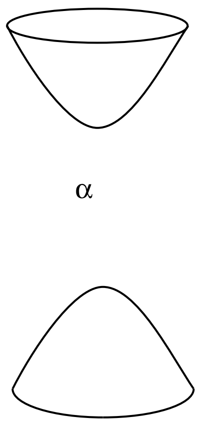
$\widetilde{\alpha}$ projective	$\overrightarrow{\alpha}$ intersection de $\widetilde{\alpha}$ avec la droite de l'infini	α affine
conique propre non vide signature $(2,1)$	vide signature $(2,0)$	ellipse $x_1^2 + x_2^2 - 1 = 0$
	2 points signature $(1,1)$	hyperbole $x_1^2 - x_2^2 + 1 = 0$
	1 point double signature $(1,0)$	parabole $x_1^2 + x_2 = 0$

Et voici maintenant pour les quadriques ([Ber] 15.3.3 avec de beaux dessins, [Sam] p. 120) :

$\widetilde{\alpha}$ projective	$\overrightarrow{\alpha}$ intersection de $\widetilde{\alpha}$ avec le plan de l'infini	α affine
quadrique homéomorphe à une sphère	conique vide signature $(3,0)$	ellipsoïde $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 1 = 0$
	2 droites complexes conjuguées signature $(2,0)$	paraboloïde elliptique $x_1^2 + x_2^2 - x_3 = 0$
signature $(3,1)$	conique propre non vide signature $(2,1)$	hyperboloïde à deux nappes $x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 + 1 = 0$
quadrique homéomorphe à un tore signature $(2,2)$	conique propre non vide signature $(2,1)$	hyperboloïde à une nappe $x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 - 1 = 0$
	2 droites réelles signature $(1,1)$	paraboloïde hyperbolique $x_1^2 - x_2^2 - x_3 = 0$

La figure ci-dessous représente le cas de l'hyperboloïde à deux nappes. Pouvez-vous vous représenter topologiquement ce qui se passe dans les autres cas ? Par exemple, le paraboloïde hyperbolique comme un tore moins la réunion de deux cercles se coupant en un point (les deux droites projectives de la quadrique dégénérée à l'infini). On ne peut pas ici dessiner les deux cercles comme intersection du tore avec un plan ; c'est normal, ce tore-ci est plongé dans $\mathbb{P}_3(\mathbb{R})$ de façon qu'il rencontre n'importe quel plan, et le dessin habituel de la chambre à air ne reflète pas cette situation.





Remarques.

– Si l'on connaît la quadrique projective $\widetilde{\alpha}$, l'intersection $\overrightarrow{\alpha}$ avec le plan à l'infini ne peut pas être n'importe quelle conique. Du point vue formes quadratiques, le problème est le suivant : si on a une forme quadratique non dégénérée Q de signature (s, t), quelle peut être la signature de la restriction q de cette forme quadratique à un hyperplan H ? Si Q est définie positive ou négative, il en est de même pour q. Sinon la signature de q peut être $(s-1, t)$ ou $(s, t-1)$ si H n'est pas isotrope, et elle est $(s-1, t-1)$ si H est isotrope. On peut obtenir ceci comme conséquence de l'exercice 14 p. 238 de livre d'exercices Algèbre 2 de P. Tauvel (Masson), ou bien à l'aide de la complétion non singulière d'un sous-espace ([Ber] 13.3.4). On peut aussi trouver la démonstration dans les compléments, lemme 1.
– On voit que la classification projective organise le zoo des surfaces quadriques affines réelles en deux espèces : celles qui contiennent des droites (les quadriques réglées) et celles qui n'en contiennent pas (les non-réglées). Cette dichotomie est aussi significative du point de vue des propriétés métriques des surfaces dans l'espace euclidien : les quadriques qui contiennent des droites sont celles de courbure de Gauss négative, les autres celles de courbure de Gauss positive. Ceci peut faire un développement pour « Formes quadratiques » ou « Étude locale de surfaces ». Voir la section 7.1.

6 Birapport de quatre points sur une conique, Pascal, Brianchon

On définit le birapport de quatre points M_1, M_2, M_3, M_4 sur une conique α (non dégénérée, non vide) de la manière suivante : On choisit un cinquième point N sur α, et on définit $[M_1, M_2, M_3, M_4]$ comme le birapport des quatre droites $[NM_1, NM_2, NM_3, NM_4]$. Si Δ est une droite ne passant pas par N et P_i le point d'intersection de de NM_i avec Δ, c'est aussi le birapport des quatre points $[P_1, P_2, P_3, P_4]$ sur Δ. Il y a bien sûr à vérifier que le birapport ainsi défini ne dépend pas du choix de N sur α. C'est fait par un calcul en coordonnées dans [Aud] p. 193, [Ber] 16.2.3 et aussi dans [Sam] p. 85. Mais on trouve aussi dans [Sam] un éclairage venant de la paramétrisation rationnelle des coniques.

On obtient une paramétrisation rationnelle de α de la manière suivante : on choisit un point N sur α. On paramétrise le faisceau de droites passant par N avec une abscisse projective t (exemple : $y = t(x+1)$ pour paramétriser le faisceau de droites passant par le point $(-1, 0)$ de $\mathbb{R}^2$). La deuxième intersection $M(t)$ de la droite du faisceau de paramètre t avec α a des coordonnées rationnelles en t (pour l'exemple précédent avec α le cercle unité, on a $\left(\frac{1-t^2}{1+t^2}, \frac{2t}{1+t^2}\right)$). Dans l'autre sens, t est bien sûr une fraction rationnelle en les coordonnées de $M(t)$. Si on choisit un autre point N' sur α et une paramétrisation du faisceau de droites passant par N' au moyen de u, alors le changement de paramétrisation nous donne t en fraction rationnelle de u et u en fraction rationnelle de t. Or une application rationnelle de $\mathbb{K} \cup \{\infty\}$ dans $\mathbb{K} \cup \{\infty\}$ qui admet une application réciproque rationnelle est une homographie (d'où la conservation du birapport). Tout ceci est bien expliqué dans [Sam] p. 72-74. On peut voir aussi l'exercice 5.15 p. 196 dans le livre d'exercices « Algèbre 1 » de S. Francinou et H. Gianella. Ceci peut faire un développement pour « Fractions rationnelles ».

Une fois connu le birapport de quatre points sur une conique, on arrive facilement au théorème de Pascal, et au théorème de Brianchon que l'on peut obtenir par polarité à partir de celui de Pascal ([Aud] p. 194, [Ber] 16.2.11-13, [Sam] p. 88 et 141). Pour la construction d'une conique donnée par cinq points en utilisant Pascal, vous pouvez voir :
`http://agreg-maths.univ-rennes1.fr/documentation/Cindy/Pascal.html`

7 Compléments

7.1 Intersection d'une quadrique avec son plan tangent. Courbure

Le but de cette partie est d'étudier l'intersection d'une quadrique non dégénérée avec ses plans tangents. Ces intersections sont toutes projectivement équivalentes, et leur classe dans la classification projective ne dépend que de la classe de la quadrique de départ. Nous verrons ceci pour les quadriques réelles dans l'espace de dimension 3, et nous utiliserons ce fait pour l'étude de la courbure de Gauss des surfaces quadriques affines euclidiennes.

Soit α une quadrique non dégénérée de $\mathbb{P}_n(\mathbb{K})$, d'équation Q. Un hyperplan projectif $H = \mathbb{P}(F)$ est tangent à α si et seulement si le pôle de H appartient à H, c'est-à-dire si et seulement si la droite vectorielle $F^\perp$ est contenue dans F. La restriction de Q à F est alors dégénérée, de rang $n-1$. On peut donc trouver une base orthogonale $(e_1, \ldots, e_n)$ de F telle que $Q(e_i) = a_i \neq 0$ pour $i = 1, \ldots, n-1$ et $Q(e_n) = 0$.

Lemme 1 *On peut compléter $(e_1, \ldots, e_n)$ en une base $(e_1, \ldots, e_n, e_{n+1})$ de $\mathbb{K}^{n+1}$ telle que la matrice de Q dans cette base soit*

$$\begin{pmatrix} a_1 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & a_{n-1} & 0 & 0 \\ 0 & \ldots & 0 & 0 & 1 \\ 0 & \ldots & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Démonstration: Soit G le sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}^{n+1}$ engendré par $(e_1, \ldots, e_{n-1})$. Son orthogonal $G^\perp$ est de dimension 2, et $G^\perp \cap F$ est la droite vectorielle engendrée par e_n. On peut donc choisir f_{n+1} dans $G^\perp \setminus F$, et alors $(e_1, \ldots, e_n, f_{n+1})$ est une base de $\mathbb{K}^{n+1}$. Soit B la forme polaire de Q. On a $B(e_n, f_{n+1}) \neq 0$ car sinon e_n serait dans le noyau de Q et Q serait dégénérée. On peut donc modifier f_{n+1} en

$$e_{n+1} = \frac{1}{B(e_n, f_{n+1})} \left(f_{n+1} - \frac{Q(f_{n+1})}{2B(e_n, f_{n+1})}\, e_n \right)$$

et on a fait ce qu'il faut pour que la matrice de Q dans la base $(e_1, \ldots, e_n, e_{n+1})$ soit bien celle de l'énoncé. $\square$

Ce lemme est en fait un cas particulier de la « complétion régulière »(13.3.4.1 dans [Ber]), un morceau de la démonstration du théorème de Witt. Ce théorème de Witt entraîne que les intersections de la quadrique α avec ses plans tangents sont des quadriques dégénérées toutes projectivement équivalentes. Nous le voyons explicitement pour une quadrique de $\mathbb{P}_3(\mathbb{R})$.

On commence par remarquer que la signature de $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ est $(1,1)$. Alors, le lemme donne immédiatement :

- L'intersection d'une quadrique non réglée (de signature $(3,1)$) avec n'importe quel plan tangent est réduite à un point (intersection de deux droites complexes conjuguées, formant une conique dégénérée de signature $(2,0)$).
- L'intersection d'une quadrique réglée (de signature $(2,2)$) avec n'importe quel plan tangent est la réunion de deux droites (formant une conique dégénérée de signature $(1,1)$).

Nous en venons maintenant à la courbure de Gauss d'une quadrique. Nous nous plaçons ici dans le cadre euclidien. Soit α une quadrique non dégénérée dans $\mathbb{R}^3$ (avec sa structure affine euclidienne canonique), d'équation $f(x_1, x_2, x_3) = 0$. Les dérivées partielles sont notées avec des indices :

$$f_{i,j} = \frac{\partial f}{\partial x_i \, \partial x_j} \ .$$

La deuxième forme fondamentale en $p \in \alpha$ est la forme quadratique donnée par (voir [Aud], p. 264-265) :

$$\mathrm{II}_p(X) = \frac{-1}{\| \bigtriangledown_p f\|} \sum_{1 \le i,j \le 3} f_{i,j}(p) X_i X_j \ ,$$

où $X = (X_1, X_2, X_3)$ est un vecteur tangent à α en p, et $\bigtriangledown_p f$ le gradient de f en p. Si on décompose l'équation de α en $f = q + \ell + c$, où q est la partie homogène de degré 2 et ℓ la partie linéaire, on obtient :

$$\mathrm{II}_p(X) = \frac{-2}{\| \bigtriangledown_p f\|} q(X) \ .$$

Par ailleurs, la formule de Taylor appliquée en p nous donne :

$$f(x) = f(p) + \bigtriangledown_p f \cdot (x - p) + q(x - p) \ ,$$

et donc, si x appartient au plan tangent $T_p(\alpha)$ d'équation $\bigtriangledown_p f \cdot (x - p) = 0$, on a

$$f(x) = q(x - p) \ .$$

On vient d'établir que la restriction de f à $T_p(\alpha)$ est proportionnelle à $\mathrm{II}_p(x - p)$. On en déduit les relations suivantes entre le signe de la courbure de Gauss de α en p et l'intersection de α avec son plan tangent :

- Le point p est elliptique (ce qui veut dire que la courbure de Gauss est > 0, ou encore que II_p est définie sur l'espace vectoriel tangent) si et seulement si l'intersection de α avec $T_p(\alpha)$ est réduite à p.
- Le point p est hyperbolique (ce qui veut dire que la courbure de Gauss est < 0, ou encore que II_p est de signature $(1,1)$, ou encore que son cône isotrope est formé de deux droites) si et seulement si l'intersection de α avec $T_p(\alpha)$ est formée de deux droites.

En conclusion :

- Tous les points d'une quadrique affine euclidienne non réglée (ellipsoïde, paraboloïde elliptique ou hyperboloïde à deux nappes) sont elliptiques : la courbure de Gauss est partout > 0.
- Tous les points d'une quadrique affine euclidienne réglée (paraboloïde hyperbolique ou hyperboloïde à une nappe) sont hyperboliques : la courbure de Gauss est partout < 0.

7.2 Quadrique passant par trois droites

Une forme quadratique en 4 variables a dix coefficients ; l'espace projectif des quadriques de $\mathbb{P}_3(\mathbb{K})$ est donc de dimension 9. Ceci entraîne que par 9 points de $\mathbb{P}_3(\mathbb{K})$ il passe toujours une quadrique (voir la discussion pour les coniques en fin de section 1). Étant donné trois droites de $\mathbb{P}_3(\mathbb{K})$, il y a toujours une quadrique qui les contient : on prend trois points sur chacune des droites, et une quadrique qui contient trois points d'une droite doit contenir la droite toute entière. On peut dire plus si les trois droites ne se coupent pas deux à deux :

Proposition 2 *Si trois droites D, D' et D'' de $\mathbb{P}_3(\mathbb{K})$ ne se coupent pas deux à deux, il existe une unique quadrique qui les contient, et elle est non dégénérée. L'image de cette quadrique est la réunion des droites rencontrant D, D' et D''.*

Ce résultat est démontré dans [Ber], 14.4.3. Voici une variante.

Démonstration: On a $D = \mathbb{P}(P)$, $D' = \mathbb{P}(P')$ et $D'' = \mathbb{P}(P'')$, où P, P' et P'' sont des plans vectoriels de $\mathbb{K}^4$, deux à deux supplémentaires. On choisit une base (v, w) de P. Soient e_1 et e_4 (resp. e_3 et e_2) les projetés de v et w sur P' parallèlement à P'' (resp. sur P'' parallèlement à P'). Alors (e_1, e_2, e_3, e_4) est une base de $\mathbb{K}^4$, et on notera (x_1, x_2, x_3, x_4) les coordonnées dans cette base. Le plan P est décrit par les équations $x_1 - x_3 = x_2 - x_4 = 0$, P' par les équations $x_2 = x_3 = 0$, P'' par les équations $x_1 = x_4 = 0$. Soit maintenant α une quadrique d'équation

$$Q = ax_1^2 + bx_2^2 + cx_3^2 + dx_4^2 + 2ex_1x_2 + 2fx_1x_3 + 2gx_1x_4 + 2hx_2x_3 + 2ix_2x_4 + 2jx_3x_4 \; .$$

Le condition que α contienne D' équivaut à ce que Q soit nul pour $(1, 0, 0, 0)$, $(0, 0, 0, 1)$ et $(1, 0, 0, 1)$, ce qui implique $a = d = g = 0$. De même, la condition que α contienne D'' entraîne $b = c = h = 0$. En ajoutant la condition que α contienne D, qui équivaut à ce que Q soit nul pour $(1, 0, 1, 0)$, $(0, 1, 0, 1)$ et $(1, 1, 1, 1)$, on trouve $f = i = 0$ et $j = -e$. Donc α doit être la quadrique d'équation

$$x_1x_2 = x_3x_4 \; ,$$

et cette quadrique passe bien par les trois droites D, D' et D''. La quadrique α est non dégénérée. On a trouvé dans la section 4.2 deux familles de droites $(D_{\lambda,\mu})$ et $(E_{\rho,\theta})$ sur α (le fait qu'on travaillait sur $\mathbb{R}$ n'intervenait pas). Les trois droites D, D' et D'' appartiennent à la famille $(D_{\lambda,\mu})$: $D = D_{1,1}$, $D' = D_{0,1}$ et $D'' = D_{1,0}$. La réunion des droites de la famille $(E_{\rho,\theta})$ est l'image de α, et chacune de ces droites coupe D, D' et D''. Réciproquement, si une droite Δ coupe D, D' et D'', alors elle est contenue dans la quadrique α (puisqu'elle contient trois points de celle-ci). Montrons en plus que Δ est une des droites $E_{\rho,\theta}$. En effet, Δ est dans le plan tangent $T_p(\alpha)$ à la quadrique en un point quelconque $p \in \Delta$. Or l'intersection de $T_p(\alpha)$ avec α est la conique dégénérée formée d'une droite de la famille $(D_{\lambda,\mu})$ et d'une droite de la famille $(E_{\rho,\theta})$. Comme les droites de la famille $(D_{\lambda,\mu})$ sont disjointes deux à deux, la droite Δ est bien dans la famille $(E_{\rho,\theta})$. $\square$

Indiquons une petite application de ce qui précède : on se pose le problème de trouver dans l'espace vectoriel $\mathbb{K}^4$ une famille de plans vectoriels (P_i) avec un nombre minimal d'éléments telle que tout plan vectoriel de $\mathbb{K}^4$ ait au moins un supplémentaire parmi les P_i. En termes géométriques, on cherche une famille de droites (D_i) de $\mathbb{P}_3(\mathbb{K})$ telle qu'aucune droite ne rencontre toutes les D_i.

Si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, quatre droites suffisent : on prend trois droites D, D' et D'' qui ne se coupent pas deux à deux, et une quatrième qui ne rencontre pas l'unique quadrique contenant D, D' et D''. Avec le choix de coordonnées ci-dessus, on peut prendre pour quatrième droite celle d'équations $x_2 = -x_1$ et $x_4 = x_3$. Alors n'importe quelle droite qui rencontre les trois premières est sur la quadrique qui les contient, et donc ne rencontre pas la quatrième.

Si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, quatre droites ne suffisent pas : la quatrième droite va toujours rencontrer la quadrique qui contient les trois premières, et donc une droite qui rencontre les trois premières. Il est clair que 6 droites suffisent (revenir à la situation vectorielle, et prendre les $6 = C_4^2$ plans de coordonnées). Pouvez-vous faire avec 5 ?

7.3 Classification projective et classification affine

Le but de cette partie est de démontrer

Théorème 3 *Soient α et β deux quadriques de $\mathbb{K}^n$, $\widetilde{\alpha}$ et $\widetilde{\beta}$ leurs complétées projectives dans $\mathbb{P}_n(\mathbb{K})$, $\overrightarrow{\alpha}$ et $\overrightarrow{\beta}$ les quadriques à l'infini. Si $\widetilde{\alpha}$ est projectivement équivalente à $\widetilde{\beta}$ et $\overrightarrow{\alpha}$ projectivement équivalente à $\overrightarrow{\beta}$, alors α est affinement équivalente à β.*

Démonstration: Nous divisons la démonstration en plusieurs étapes.

1) Réduction à un problème concernant une seule forme quadratique.

Fixons les notations. Soit Q une forme quadratique sur $E = \mathbb{K}^{n+1}$ équation de $\widetilde{\alpha}$, Q' une équation de $\widetilde{\beta}$. On note F l'hyperplan vectoriel $x_{n+1} = 0$ de E, de sorte que $\mathbb{P}(F)$ est l'hyperplan à l'infini de $\mathbb{P}_n(\mathbb{K}) = \mathbb{P}(E)$. Les restrictions $Q|_F$ et $Q'|_F$ sont les équations de $\overrightarrow{\alpha}$ et $\overrightarrow{\beta}$ respectivement. Les hypothèses du théorème sont qu'il existe des éléments non nuls ν et ρ de $\mathbb{K}$ et des isométries :

$$\begin{array}{rcl} h : (E, \nu Q) & \longrightarrow & (E, Q') \ , \\ v : (F, \rho Q|_F & \longrightarrow & (F, Q'|_F) \ . \end{array}$$

Précisément, h appartient à $\mathrm{GL}(E)$ et vérifie $Q' \circ h = \nu Q$, et v appartient à $\mathrm{GL}(F)$ et vérifie $(Q'|_F) \circ v = \rho Q|_F$. Ce qu'on veut montrer, à savoir que α est affinement équivalente à β, revient à dire qu'il existe $\varphi \in \mathrm{GL}(E)$ qui envoie F dans lui-même (et donc φ induit une transformation affine de $\mathbb{K}^n$), et un élément non nul θ de $\mathbb{K}$, vérifiant $Q' \circ \varphi = \theta Q$. On veut donc une isométrie

$$\varphi : (E, \theta Q) \longrightarrow (E, Q') \quad \text{avec} \quad \varphi(F) = F \ .$$

Nous avons traduit notre problème géométrique en un problème de formes quadratiques. Nous allons maintenant nous ramener à un problème concernant une seule forme quadratique. Voici l'énoncé de ce problème.

> *Soit Q une forme quadratique sur E, F et F' des hyperplans de E, λ un élément non nul de $\mathbb{K}$, et u une isométrie*
>
> $$u : (F, \lambda Q|_F) \longrightarrow (F', Q|_{F'}) \ .$$
>
> *Trouver un élément non nul μ de $\mathbb{K}$ et une isométrie*
>
> $$g : (E, \mu Q) \longrightarrow (E, Q)$$
>
> *telle que $g(F) = F'$.*

En effet, si l'on résoud ce problème pour l'isométrie.

$$u = h^{-1} \circ v : (F, \frac{\rho}{\nu} Q|_F) \longrightarrow (F, \frac{1}{\nu} Q'|_F) \longrightarrow (F', Q|_{F'}) \ ,$$

où $F' = h^{-1}(F)$, alors on a bien une isométrie

$$\varphi = h \circ g : (E, \mu\nu Q) \longrightarrow (E, \nu Q) \longrightarrow (E, Q') \quad \text{avec} \quad \varphi(F) = F' \ .$$

Nous allons dans les prochaines étapes résoudre le problème.

2) Le cas où Q et $Q|_F$ sont toutes deux non dégénérées.

Soit $(e_1, \dots, e_n)$ une base de F orthogonale pour $Q|_F$, $(e'_1, \dots, e'_n)$ son image par u. Posons $Q(e_i) = a_i$ (c'est un élément non nul de $\mathbb{K}$). On a $Q(e'_i) = \lambda a_i$. On complète les bases de F et F' en des bases de E orthogonales pour Q, au moyen des vecteurs e_{n+1} et f'_{n+1} respectivement. Soit $Q(e_{n+1}) = a_{n+1}$ et $Q(f'_{n+1}) = a'_{n+1}$; ce sont des éléments non nuls de $\mathbb{K}$. Les matrices

$$\begin{pmatrix} a_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & a_n & 0 \\ 0 & \dots & 0 & a_{n+1} \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \begin{pmatrix} \lambda a_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \lambda a_n & 0 \\ 0 & \dots & 0 & a'_{n+1} \end{pmatrix}$$

représentent Q dans des bases différentes. Le quotient de leurs déterminants est donc un carré, et il existe un élément non nul δ de $\mathbb{K}$ tel que

$$\lambda^n a'_{n+1} = \delta^2 a_{n+1} \ .$$

Si n est impair, $n = 2k + 1$, posons

$$e'_{n+1} = \frac{\lambda^{k+1}}{\delta} f'_{n+1} \ .$$

On a alors $Q(e'_{n+1}) = \lambda a_{n+1}$. Si on définit $g \in \mathrm{GL}(E)$ par $g(e_i) = e'_i$ pour $i = 1, \dots, n+1$, alors $Q \circ g = \lambda Q$ et le problème est résolu dans ce cas.

Si n est pair, $n = 2k$, posons

$$e'_{n+1} = \frac{\lambda^k}{\delta} f'_{n+1} \ .$$

On a maintenant $Q(e'_{n+1}) = a_{n+1} = Q(e_{n+1}) \neq 0$. D'après le lemme ci-dessous, il existe alors une isométrie $g : (E, Q) \to (E, Q)$ telle que $g(e_{n+1}) = e'_{n+1}$. Cette isométrie envoie $(e_{n+1})^\perp = F$ sur $(e'_{n+1})^\perp = F'$, et donc le problème est aussi résolu dans ce cas.

Lemme 4 *Soit Q une forme quadratique non dégénérée sur E, e et e' deux vecteurs de E tels que $Q(e) = Q(e') \neq 0$. Alors il existe une isométrie $g : (E, Q) \to (E, Q)$ telle que $g(e) = e'$.*

Démonstration: (Voir le début de la démonstration du théorème de Witt 15.7.1 dans [Ber] ou le Lemme 1 de la section 4 du chapitre 8 du livre d'algèbre de D. Perrin.) Soit v un vecteur non isotrope de (E, Q), c.-à-d. $Q(v) \neq 0$. Notons B la forme polaire de Q. L'endomorphisme σ_v défini par

$$\sigma_v(x) = x - 2\frac{B(x, v)}{Q(v)} v$$

est une isométrie de (E,Q), qui vérifie $\sigma_v(v) = -v$ et $\sigma_v(x) = x$ pour tout vecteur x orthogonal à v. C'est la symétrie orthogonale par rapport à l'hyperplan $v^\perp$.

Si le vecteur $e - e'$ est non isotrope, alors $\sigma_{e-e'}(e) = e'$ et on peut prendre $g = \sigma_{e-e'}$. Sinon, le vecteur $e+e'$ est forcément non isotrope car $Q(e+e') = Q(e-e') = 0$ entraînerait $Q(e) = \frac{1}{4}(Q(e+e') + Q(e-e')) = 0$. Alors $\sigma_{e+e'}(e) = -e'$, et on peut prendre $g = -\sigma_{e+e'}$. $\square$

3) Le cas où Q est non dégénérée et $Q|_F$ est dégénérée.

La droite vectorielle $F^\perp$ est contenue dans F, et le rang de $Q|_F$ est $n-1$. On peut donc trouver une base orthogonale $(e_1, \dots, e_n)$ de E telle que $Q(e_i) = a_i \neq 0$ pour $i = 1, \dots, n-1$ et $Q(e_n) = 0$. D'après le lemme 1, on peut compléter en une base $(e_1, \dots, e_n, e_{n+1})$ de E dans laquelle la matrice de Q est

$$\begin{pmatrix} a_1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & a_{n-1} & 0 & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 1 \\ 0 & \dots & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Posons $e'_i = u(e_i)$ pour $i = 1, \dots, n$. On peut de nouveau appliquer le lemme 1 pour compléter en une base $(e'_1, \dots, e'_n, e'_{n+1})$ de E dans laquelle la matrice de Q/λ est la même que ci-dessus. Si on définit $g \in \mathrm{GL}(E)$ par $g(e_i) = e'_i$ pour $i = 1, \dots, n+1$, alors $Q \circ g = \lambda Q$ et le problème est résolu dans ce cas.

4) Le cas où Q est dégénérée.

Notons N le noyau de (E,Q). La forme quadratique Q induit une forme quadratique non dégénérée $\overline{Q}$ sur le quotient E/N : si $\overline{x}$ désigne l'image de $x \in E$ dans E/N, on a $\overline{Q}(\overline{x}) = Q(x)$. On notera r le rang de Q ; c'est aussi la dimension de E/N.

Si F contient N, le rang de $Q|_F$ est strictement plus petit que r. Si l'hyperplan F ne contient pas N, il contient un supplémentaire G de N et la surjection canonique $E \to E/N$ induit une isométrie $(G, Q|_G) \to (E/N, \overline{Q})$; donc le rang de $Q|_F$ est r dans ce cas. La même remarque sur le rang s'applique à F'. Puisque $Q|_F$ et $Q|_{F'}$ ont même rang, on en déduit que F contient N si et seulement si F' contient N.

Supposons d'abord que F et F' contiennent tous les deux N. Alors F/N et F'/N sont des hyperplans de E/N, et u induit une isométrie

$$\overline{u} : (F/N, \lambda\overline{Q}|_{F/N}) \longrightarrow (F'/N, \overline{Q}|_{F'/N}) \,.$$

En appliquant à $(E/N, \overline{Q})$ ce qu'on a fait pour le cas où Q est non dégénérée, on trouve une isométrie

$$\overline{g} : (E/N, \mu\overline{Q}) \longrightarrow (E/N, \overline{Q}) \quad \text{telle que} \quad \overline{g}(F/N) = F'/N \,.$$

On choisit une base $(e_1, \dots, e_{n+1-r})$ de N que l'on complète en une base $(e_1, \dots, e_n)$ de F, puis en une base $(e_1, \dots, e_{n+1})$ de E. On choisit des vecteurs $e'_{n+2-r}, \dots, e'_n$ de F' et un vecteur e'_{n+1} de E tels que $\overline{e'_i} = \overline{g}(\overline{e_i})$, et on définit $g : E \to E$ par $g|_N = \mathrm{Id}_N$ et $g(e_i) = e'_i$ pour $i = n+2-r, \dots, n+1$. Alors g est une isométrie de $(E, \mu Q)$ sur (E,Q) qui envoie F sur F', et ceci résoud le problème dans ce cas.

Supposons maintenant que ni F ni F' ne contiennent N. Les images de F et de F' dans le quotient E/N sont E/N tout entier. Choisissons une base $(e_1, \dots, e_{n+1})$ de E telle que $(e_1, \dots, e_n)$ soit une base de F et $(e_{r+1}, \dots, e_{n+1})$ une base de N. Choissisons des vecteurs

$e'_1, \ldots, e'_r$ de F' tels que $\overline{e'_i} = \overline{e_i}$, et complétons en une base $(e'_1, \ldots, e'_n)$ de F', puis en une base $(e'_1, \ldots, e'_{n+1})$ de E en choisissant toujours les vecteurs que l'on ajoute dans N. Alors l'isomorphisme g défini par $g(e_i) = e'_i$ pour $i = 1, \ldots, n+1$ est une isométrie de (E, Q) qui envoie F sur F'. Ceci termine la démonstration du théorème. $\square$

La lectrice qui connaît le théorème de Witt pourra remarquer que le problème sur les formes quadratiques résolu dans la démonstration ci-dessus est vraiment très proche de l'énoncé de ce théorème : ce dernier affirme que s'il y a une isométrie $(F, Q|_F) \to (F', Q|_{F'})$, alors on peut trouver une isométrie de (E, Q) qui envoie F sur F' (ici F et F' peuvent être des sous-espaces de codimension > 1, mais Q doit être non dégénérée). La présence de la constante λ empêche d'appliquer directement le théorème de Witt à notre problème. Cependant, les ingrédients essentiels de la démonstration sont les mêmes.

Références

[Aud] M. Audin. *Géométrie.* Belin 1998

[Ber] M. Berger. *Géométrie.* Cedic - Fernand Nathan, 1979.

[Sam] P. Samuel. *Géométrie Projective.* Presses Universitaires de France, 1986.