

COURBES ET SURFACES

NOUS considérerons les courbes (réelles) comme des sous-espaces topologiques de \mathbf{R}^2 ou \mathbf{R}^3 unions d'images d'ouverts de \mathbf{R} , et les surfaces comme des sous-espaces topologiques de \mathbf{R}^3 unions d'images d'ouverts de \mathbf{R}^2 , par des fonctions au moins C^1 . Elles seront données

— soit par des cartes : directement comme images d'ouverts de \mathbf{R} ou \mathbf{R}^2 , en «paramétriques» :

$$\begin{aligned} t &\mapsto M(t) \quad \text{où } t \in \Omega \subseteq \mathbf{R} \text{ pour les courbes,} \\ u &\mapsto M(u) \quad \text{où } u \in \Omega \subseteq \mathbf{R}^2 \text{ pour les surfaces;} \end{aligned}$$

et on utilisera parfois les coordonnées : $(u, v) \mapsto (x, y, z)$;

— soit par des «équations implicites» $f(M) = 0$ où

$$\begin{aligned} f : \mathbf{R}^2 &\rightarrow \mathbf{R} \quad \text{pour les courbes planes,} \\ f : \mathbf{R}^3 &\rightarrow \mathbf{R}^2 \quad \text{pour les courbes de l'espace } \mathbf{R}^3, \\ f : \mathbf{R}^3 &\rightarrow \mathbf{R} \quad \text{pour les surfaces de } \mathbf{R}^3. \end{aligned}$$

et on notera avec les coordonnées $f(x, y) = 0$ ou $f(x, y, z) = 0$ ou $f(x, y, z) = g(x, y, z) = 0$.

— soit même comme graphes, ce qui cumule les deux méthodes :

$$\begin{aligned} y &= f(x) \quad \text{avec } f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R} \quad \text{pour les courbes planes,} \\ \begin{pmatrix} y \\ z \end{pmatrix} &= f(x) \quad \text{avec } f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}^2 \quad \text{pour les courbes de l'espace } \mathbf{R}^3, \\ z &= f(x, y) \quad \text{avec } f : \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R} \quad \text{pour les surfaces de } \mathbf{R}^3. \end{aligned}$$

Le tracé des courbes se fait traditionnellement de diverses manières :

- *En paramétriques.* Comme dans le cas des fonctions : on détermine des intervalles du paramètre (souvent t comme le temps) sur lesquels les coordonnées sont monotones. On a donc un «tableau de variations». On place des points remarquables, par exemple les extrémités de ces intervalles, avec leurs tangentes (voir le paragraphe suivant).
- *En implicites.* On essaie un régionnement du plan permettant de localiser des branches de courbes. Si la courbe a des points multiples, on peut faire passer une famille linéaire de courbes de degré moindre par ces points. L'intersection ou les intersections restantes sont en moins grand nombre et on peut espérer les localiser plus facilement, pour raffiner le régionnement (ne ps oublier les points à l'infini).
- Ne pas négliger le passage en *coordonnées polaires* que suggèrent parfois les données du problème. Ainsi la lemniscate de Bernoulli a pour coordonnées implicites $(x^2 + y^2)^2 - x^2 + y^2$ en cartésiennes, mais plus simplement $\rho = \pm\sqrt{\cos(2\theta)}$ en polaires. L'étude en polaires se fait comme en cartésiennes en isolant des intervalles où le module et l'argument sont monotones.

Voir les exemples en fin de chapitre.

On visualise une surface en dessinant des familles de courbes tracées sur la surface, par exemple ses intersections avec les plans horizontaux $z = h$, ou en considérant $M(u, v)$ comme une famille de courbes $u \mapsto M(u, v)$ paramétrée par v .

§ 1. Etude locale des courbes planes

Images de $\varphi : U \rightarrow \mathbf{R}^2$ où U est un ouvert de \mathbf{R} . Taylor-Young au voisinage de t_0 :

$$\varphi(t_0 + h) = \varphi(t_0) + D\varphi(t_0) \cdot h + \varepsilon \cdot h$$

La tangente passe par $M_0 = \varphi(t_0)$ et est parallèle à $D\varphi(t_0)$. C'est l'approximation de degré un de $\varphi(t_0 + h)$.
En paramétriques :

$$h \mapsto \varphi(t_0) + D\varphi(t_0) \cdot h$$

En implicites : on écrit que le vecteur $M_0M = M - M_0$ est proportionnel au vecteur tangent :

$$\det(M_0M, D\varphi(t_0)) = 0 \text{ soit } \begin{vmatrix} x-x_0 & x'_0 \\ y-y_0 & y'_0 \end{vmatrix} = 0$$

Encore au premier ordre, la forme quadratique, en $h = dt$ (on note souvent $(dx, dy) = (x'dt, y'dt)$ les coordonnées d'un vecteur tangent)

$$Q_1(t)(dt) = \|D\varphi(t_0)dt\|^2 = (x'^2 + y'^2)dt^2 = ds^2$$

où s s'appelle l'abscisse curviligne (la longueur de l'arc de courbe) et $(x'^2 + y'^2) = v^2$ est le carré de la vitesse.

Pour préciser l'allure de la courbe, on regarde au second ordre :

$$\varphi(t_0 + h) = \varphi(t_0) + D\varphi(t_0) \cdot h + (1/2)D^2\varphi(t_0)(h)^2 + \varepsilon \cdot h^2.$$

Donc si $D^2\varphi(t_0) \neq 0$, la courbe est du même côté de la tangente au voisinage de $\varphi(t_0)$. Plus précis : prenons l'abscisse curviligne pour paramètre en un point où $D\varphi(t) \neq 0$ ($ds/dt = v > 0$ et donc $t \mapsto s$ est un difféomorphisme). Notons T le vecteur unitaire de la tangente orienté dans le sens des abscisses curvilignes croissantes. De $T \cdot T = 1$ on déduit $T \cdot (dT/ds) = 0$. On note N le vecteur unitaire déduit de T par une rotation de $\pi/2$. Alors dT/ds est proportionnel à N : $dT/ds = c(s)N$ et $c(s)$ s'appelle la courbure. Son inverse $R(s) = 1/c(s)$ est le rayon de courbure. Le même raisonnement montre que $dN/ds = eT$ est proportionnel à T , et dériver $T \cdot N = 0$ donne

$$\frac{dT}{ds} \cdot N + T \cdot \frac{dN}{ds} = 0 = c + e, \text{ soit } e = -c$$

et on a donc les «formules de Frénet» :

$$\frac{d}{ds}(T \ N) = (T \ N) \begin{pmatrix} 0 & -c \\ c & 0 \end{pmatrix}$$

Exercice : montrer que les deux conditions suivantes sont équivalentes pour une application dérivable $\mathbf{R} \rightarrow \mathbf{M}_n(\mathbf{R})$

(i) $\mathbf{R}(t) \in \mathbf{SO}_n(\mathbf{R})$,

(ii) $\mathbf{R}'(t) = \mathbf{A}(t)\mathbf{R}(t)$ où $\mathbf{A}(t)$ est antisymétrique, et $\mathbf{R}(t_0) \in \mathbf{SO}_n(\mathbf{R})$.

Pour calculer ces valeurs en fonction de φ , on dérive deux fois par rapport à t

$$\frac{dM}{dt} = \frac{dM}{ds} \cdot \frac{ds}{dt} = vT \quad \text{puis} \quad \frac{d^2M}{dt^2} = \frac{dv}{dt}T + v\frac{dT}{ds}v = aT + v^2cN.$$

d'où, en notant ' et '' les dérivées par rapport à t et en faisant le produit scalaire avec N : $N \cdot M'' = v^2c$ et on obtient les coordonnées de N en remarquant que $vN = (-y', x')$:

$$c = \frac{N \cdot M''}{v^2} = \frac{(-y'x'' + x'y'')/v}{v^2} = \frac{x'y'' - y'x''}{(x'^2 + y'^2)^{3/2}} = \frac{\det(M', M'')}{\|M'\|^3}$$

Attention : la courbure des courbes planes n'est pas forcément positive ou nulle. En prenant M_0 comme origine et T et N comme vecteurs unitaires et l'abscisse curviligne comme paramètre, la courbe est décrite au voisinage de M_0 par

$$\begin{cases} x = s + \varepsilon s^2 \\ y = \frac{1}{2}cs^2 + \varepsilon s^2 \end{cases} \quad \text{soit} \quad y \sim \frac{1}{2}cx^2$$

comme sur le cercle d'équation $x^2 + y^2 - (2/c)y = 0$, d'où le nom de rayon de courbure pour $1/c$. Si on parcourt la courbe dans le sens des s croissants, on tourne à gauche si $c > 0$ et à droite si $c < 0$.

§ 2. Les courbes dans l'espace

Images de $\varphi : U \rightarrow \mathbf{R}^3$ où U est un ouvert de \mathbf{R} . Taylor-Young au voisinage de t_0 :

$$\varphi(t_0 + h) = \varphi(t_0) + D\varphi(t_0) \cdot h + \varepsilon \cdot |h|$$

Equation de la tangente en paramétriques :

$$h \mapsto \varphi(t_0) + D\varphi(t_0)h.$$

En implicites, on écrit que le vecteur M_0M est proportionnel au vecteur tangent :

$$M_0M \wedge D\varphi(t_0) = 0 \text{ soit } \begin{vmatrix} x-x_0 & x'_0 \\ y-y_0 & y'_0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} y-y_0 & y'_0 \\ z-z_0 & z'_0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x-x_0 & x'_0 \\ z-z_0 & z'_0 \end{vmatrix} = 0$$

(la nullité de deux déterminants implique celle du troisième). La forme quadratique en dt dite ds^2 donne la longueur sur la courbe :

$$ds^2 = dM^2 = \frac{dM}{dt} \cdot \frac{dM}{dt} dt^2$$

Pour raffiner on passe au second ordre : on cherche les variations du vecteur unitaire tangent T :

$$\begin{aligned} \frac{dM}{dt} &= \frac{dM}{ds} \frac{ds}{dt} = vT, \\ \frac{d^2M}{dt^2} &= \frac{d}{dt}vT = \frac{dv}{dt}T + v \frac{dT}{ds} \frac{ds}{dt} = v'T + v^2 \frac{dT}{ds}. \end{aligned}$$

On pose $(dT/ds) = cN$, où N s'appelle le vecteur normal, perpendiculaire à T comme pour les courbes planes (mais ici $c \geq 0$), et où $c = \|dT/ds\|$ s'appelle la courbure en s . Alors $\|N\| = 1$ et on pose $B = T \wedge N$ de façon que (T, N, B) forment un repère orthonormé direct, dit repère de Frénet. B s'appelle le vecteur binormal. On a :

$$\frac{dB}{ds} = \frac{dT}{ds} \wedge N + T \wedge \frac{dN}{ds} = -\tau N$$

en écrivant que dN/ds qui est perpendiculaire à N est de la forme $\kappa T + \tau B$. Reste à évaluer κ en dérivant le produit scalaire $T \cdot N = 0$ par rapport à s :

$$\frac{dT}{ds} \cdot N + T \cdot \frac{dN}{ds} = 0 = c + \kappa$$

d'où les formules de Frénet (on constate que la matrice est bien antisymétrique) :

$$\frac{d}{ds}(T \ N \ B) = (T \ N \ B) \begin{pmatrix} 0 & -c & 0 \\ c & 0 & -\tau \\ 0 & \tau & 0 \end{pmatrix}$$

Pour calculer explicitement c et τ , on dérive trois fois par rapport à t :

$$\begin{aligned} M' &= \frac{dM}{dt} = \frac{dM}{ds} \frac{ds}{dt} = vT, \\ M'' &= \frac{d^2M}{dt^2} = v'T + v \frac{dT}{ds} \frac{ds}{dt} = v'T + v^2cN, \\ M''' &= \frac{d^3M}{dt^3} = v''T + (3vv'c + v^2c'')N + v^2c \frac{dN}{ds} \frac{ds}{dt} \\ &= (v'' - v^3c^2)T + (3vv'c + v^2c'')N + v^3c\tau B. \end{aligned}$$

D'où $c = \frac{\|M' \wedge M''\|}{v^3} = \frac{\|M' \wedge M''\|}{\|M'\|^3}$ et $\tau = \frac{\det(M', M'', M''')}{v^6c^2} = \frac{\det(M', M'', M''')}{\|M' \wedge M''\|^2}$ (on vérifie que c et τ sont bien homogènes à l'inverse d'une longueur).

Exercice : Calculer la courbure et la torsion d'une hélice circulaire de rayon r et de pas $2\pi a$.

En prenant M_0 comme origine et T, N et B comme vecteurs de base et s comme paramètre, on obtient

$$\begin{cases} x = s + \varepsilon s^3 \\ y = cs^2 + \varepsilon' s^3 \\ z = c\tau s^3 + \varepsilon'' s^3 \end{cases} \quad \text{soit} \quad \begin{cases} y \sim cx^2 \\ z \sim c\tau x^3 \end{cases}$$

Si on parcourt la courbe en tournant à gauche, on monte (comme dans un escalier en colimaçon) si $\tau > 0$, on descend si $\tau < 0$.

§ 3. Les surfaces dans l'espace

Images de $\varphi : U \rightarrow \mathbf{R}^3$ où U est un ouvert de \mathbf{R}^2 . La formule de Taylor-Young au premier ordre :

$$\varphi(P + H) = \varphi(P) + D\varphi(P)(H) + \varepsilon\|H\|$$

donne l'application tangente en $\varphi(P) : D\varphi(P)$ et l'équation (en paramétriques) du plan tangent en $\varphi(P)$:

$$H \mapsto \varphi(P) + D\varphi(P)(H).$$

En implicites, on écrit que M_0M est dans le plan engendré par $\partial\varphi/\partial u$ et $\partial\varphi/\partial v$:

$$\det(M_0M, \frac{\partial\varphi}{\partial u}, \frac{\partial\varphi}{\partial v}) = 0 \quad \text{soit} \quad \begin{vmatrix} x - x_0 & x'_u & x'_v \\ y - y_0 & y'_u & y'_v \\ z - z_0 & z'_u & z'_v \end{vmatrix} = 0$$

Toujours au premier ordre, on définit la première forme quadratique $Q_1(dP)^2$, dite ds^2 (ce n'est pas le le carré d'une forme différentielle) :

$$Q_1(dP)^2 = dM^2 = \left(\frac{\partial M}{\partial u} du + \frac{\partial M}{\partial v} dv \right)^2 = \left(\frac{\partial M}{\partial u} \right)^2 du^2 + 2 \frac{\partial M}{\partial u} \frac{\partial M}{\partial v} du dv + \left(\frac{\partial M}{\partial v} \right)^2 dv^2$$

C'est elle qui donne la longueur d'une courbe tracée sur la surface, quand u et v sont fonctions d'un même paramètre t . Carré scalaire, elle est définie positive et son discriminant $\Delta = (M'_u)^2(M'_v)^2 - (M'_u \cdot M'_v)^2$ est donc positif. On pose $d\sigma = \sqrt{\Delta} dudv$ l'élément d'aire sur la surface. Noter que c'est aussi $\|M'_u \wedge M'_v\| dudv$ en vertu de l'égalité $\|U \wedge V\|^2 + (U \cdot V)^2 = \|U\|^2 \|V\|^2$.

Pour préciser, on développe au second ordre :

$$\varphi(P + H) = \varphi(P) + D\varphi(P)(H) + (1/2)D^2\varphi(P)(H)^2 + \varepsilon\|H\|^2$$

Au voisinage d'un point $M_0 = \varphi(P_0)$ la distance d'un point $M = \varphi(P_0 + H)$ au plan tangent s'obtient en prenant le produit scalaire $M_0M \cdot W$, où W est un vecteur unitaire perpendiculaire en M_0 à la surface :

$$M_0M \cdot W = (1/2)W \cdot D^2\varphi(P_0)(H)^2 + \varepsilon\|H\|^2 \quad \text{et on pose} \\ Q_2(H) = W \cdot D^2\varphi(P_0)(H)^2.$$

On appelle Q_2 la seconde forme quadratique fondamentale sur la surface. Pour la calculer, on dérive deux fois φ (en notant traditionnellement du et dv les coordonnées du vecteur H)

$$D^2\varphi(du, dv)^2 = M_{u^2}'' du^2 + 2M_{uv}'' dudv + M_{v^2}'' dv^2$$

D'autre part, $W = M'_u \wedge M'_v / \|M'_u \wedge M'_v\|$. Par définition de $U \wedge V$, on a $(U \wedge V) \cdot W = \det(U, V, W)$, d'où

$$Q_2(du, dv)^2 = \frac{\det(M_u, M_v, M_{u^2}'') du^2 + \det(M_u, M_v, M_{uv}'') dudv + \det(M_u, M_v, M_{v^2}'') dv^2}{\|M'_u \wedge M'_v\|}$$

Cela dit, il vaut mieux mettre en facteur le calcul de W et utiliser la définition de $Q_2 = W \cdot D^2\varphi(du, dv)^2$.

Si $t \mapsto P$ est une courbe tracée sur la surface passant par M_0 en $t_0 = 0$ (mettons), alors on peut calculer $d^2M/dt^2 = M''$ directement comme au paragraphe précédent

$$\begin{cases} M' = vT, \\ M'' = v'T + v^2cN, \end{cases} \quad \text{ou en passant par } P : \quad \begin{cases} M' = D\varphi(P)P', \\ M'' = D^2\varphi(P)(P')^2 + D\varphi(P)(P''). \end{cases}$$

En faisant le produit scalaire avec un vecteur unitaire normal à la surface en M :

$$\begin{aligned} W \cdot M'' &= v^2(W \cdot cN) = W \cdot D^2\varphi(P)(P')^2, \quad \text{soit} \\ c(W \cdot N) &= c_W = \frac{Q_2(P')}{Q_1(P')}. \end{aligned}$$

Cette courbure ne dépend que de la tangente à la courbe en M_0 . C'est la courbure d'une courbe tracée sur la surface, dont la normale N coïncide avec W , par exemple la section de la surface par un plan passant par W : une section «normale».

Notons A_1 la matrice de Q_1 et A_2 celle de Q_2 . Il existe alors une base du plan tangent dans lequel la matrice de Q_1 est la matrice identique et la matrice de Q_2 est diagonale. Dans cette base, de matrice P dans la base (M'_u, M'_v) , les valeurs propres de A_2 sont les racines du polynôme

$$\begin{aligned} \det(P^{-1}A_2P - \lambda I) &= \det(P^{-1}A_2P - \lambda P^{-1}A_1P) = \det(P^{-1}(A_2 - \lambda A_1)P) \\ &= \det(A_2 - \lambda A_1) \end{aligned}$$

Les directions propres de Q_2 s'appellent les directions principales et les courbures «principales» correspondantes sont les valeurs propres associées. Leur somme (resp. leur produit) est la courbure moyenne (resp. totale) et on a donc

$$\sum c_i = \text{tr}(A_2A_1^{-1}) \quad \text{resp.} \quad \prod c_i = \frac{\det A_2}{\det A_1}$$

où A_1 et A_2 sont les matrices des formes quadratiques Q_1 et Q_2 .

L'application de Weingarten. L'analogie de la variation du vecteur tangent des courbes est la variation du plan tangent caractérisé par son vecteur normal N . De $\|N\|^2 = 1$, on déduit $N \cdot dN = 0$: la différentielle du vecteur normal est dans le plan tangent. Faisons passer par le point M_0 un arc de courbe $t \mapsto P$ comme ci-dessus, de vitesse $M' = X$ en M_0 et d'accélération M'' . En dérivant par rapport à t la relation $M' \cdot N = 0$, on trouve

$$(W1) \quad M'' \cdot N = -M' \cdot \frac{dN}{dt} = -X \cdot DN_0(X)$$

où $DN(M_0)$ est la dérivée en M_0 de l'application $M \mapsto N(M)$. L'application de Weingarten est l'opposé de cette dérivée : $X \mapsto -DN(M_0)(X)$. Ainsi la relation (W1) démontre la propriété suivante :

COROLLAIRE. — *L'accélération normale d'un point d'une courbe passant par M_0 et de vitesse $M' = X$ est $-X \cdot DN_0(X)$: elle ne dépend que de la vitesse du point.*

Montrons que cet endomorphisme est symétrique : comme N est perpendiculaire à la surface, il vérifie $\det(M'_u, M'_v, X) = \lambda(u, v)N \cdot X$ pour tout vecteur X . En dérivant par rapport à u , on obtient

$$\lambda'_u N \cdot X + \lambda N'_u \cdot X = \det(M''_{u^2}, M'_v, X) + \det(M'_u, M''_{uv}, X).$$

En prenant $X = M'_v$ perpendiculaire à N , et en remarquant que $N'_u = DN(M'_u)$:

$$\lambda'_u N \cdot M'_v = \lambda M'_v \cdot DN(M'_u) = \det(M'_u, M''_{uv}, M'_v) = -\det(M'_u, M'_v, M''_{uv})$$

Le même calcul en dérivant par rapport à v donne

$$\lambda'_v N \cdot M'_u = \lambda M'_u \cdot DN(M'_v) = \det(M''_{uv}, M'_v, M'_u) = -\det(M'_u, M'_v, M''_{uv})$$

et DN est bien symétrique dans la base (M'_u, M'_v) .

Or on a vu plus haut que $M'' \cdot N = Q_2(P')$. Donc en exprimant M' en fonction de $P' : M' = D\phi(M_0)(P')$, on obtient

$$\frac{Q_2(P')}{Q_1(P')} = - \left(\frac{P'}{\sqrt{Q_1(P')}} \right) \cdot D(N_0) \left(\frac{P'}{\sqrt{Q_1(P')}} \right).$$

On voit donc que l'application de Weingarten induit la même forme quadratique que celle des courbures, puisque $P'/\sqrt{Q_1(P')}$ est un vecteur tangent unitaire arbitraire. Comme sa matrice est symétrique, elle est bien égale à la matrice des courbures.

§ 4. Utilisation d'autres coordonnées et autres trucs

Etude par régionnement. Parfois on peut dessiner la courbe avec une certaine précision au moyen de régionnements du plan et en plaçant certains points avec leurs tangentes (en particulier les points à l'infini). Exemple :

$$(y-x)^2(x^2+y^2) - 2x(x-y)^2 - 2x^2 = 0$$

définit une courbe d'ordre 4 passant par l'origine avec Oy tangente double (couper par $y = x$ donne une solution double $x = 0$ et le point à l'infini compté deux fois, et par $x = 0$ une solution quadruple). Tangentes au point à l'infini : on coupe la courbe par $y = x + h$, droite tournant autour du point $(1, 1, 0)$. Après remplacement, on trouve

$$(*) \quad (h^2 - 1)x^2 + h^2(h-1)x + \frac{1}{2}h^4 = 0.$$

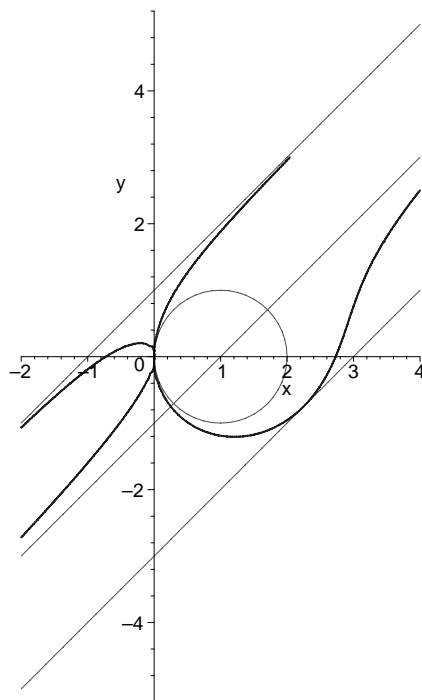
Le degré a baissé de 2 parce qu'on a coupé par une droite passant par le point double à l'infini. Il baisse encore de 1 pour $h = -1$ qui donne une asymptote ordinaire et de 2 pour $h = 1$ qui donne une asymptote double.

Les points sur les axes sont $x = 0 \Rightarrow y^4 = 0$ et $y = 0 \Rightarrow x^4 - 2x^3 - 2x^2 = 0$ qui a pour racines $x = 0$ deux fois et $x = 1 \pm \sqrt{3}$.

Enfin pour le régionnement, on coupe par une parallèle aux asymptotes pour obtenir l'équation (*) et on étudie son nombre de solutions :

$$\Delta = h^4(h-1)(-h-3)$$

Donc solutions réelles pour $-3 \leq h < 1$ (on a vu que pour $h = 1$ on n'a pour solution que les points à l'infini). De plus le produit des racines vaut $h^4/2(h^2 - 1)$. Elles sont donc positives pour $h < -1$ et de signes opposés pour $|h| \leq 1$. Pour $h = -3$, il y a une solution double $x = 9/4$. Enfin, l'examen de l'équation montre qu'on doit avoir $x^2 + y^2 - 2x \geq 0$. Tous ces renseignements permettent de tracer une bonne approximation de la courbe :



Un exemple de régionnement.

Etude en polaires. On cherche les asymptotiques du conoïde de Plücker, d'équation

$$z(x^2 + y^2) = 2axy, \text{ soit } z = a \sin(2\theta)$$

En imaginant le point M dépendant d'un paramètre t , on sait que dans le repère déduit du repère $Oxyz$ par la rotation d'axe Oz d'angle θ , les coordonnées du vecteur dérivé sont $M' = (\rho', \rho\theta', z')$ comme on le voit en dérivant $M = \rho e^{i\theta}$. D'autre part ces coordonnées sont liées par l'équation dérivée

$$z' = 2a \cos(2\theta)\theta' = 2a \frac{\cos(2\theta)}{\rho} \rho\theta'$$

Les coordonnées du vecteur dérivée seconde sont $M'' = (\rho'', 2\rho'\theta' + \rho\theta'', z'')$, comme on le voit en dérivant deux fois $M = \rho e^{i\theta}$. On écrit qu'il est dans le plan tangent :

$$z'' = 2a \frac{\cos(2\theta)}{\rho} (2\rho'\theta' + \rho\theta'')$$

Mais ses coordonnées sont liées par la relation obtenue en dérivant deux fois l'équation du conoïde.

$$z'' = -4a \sin(2\theta)\theta'^2 + 2a \cos(2\theta)\theta''$$

d'où en soustrayant et en simplifiant par $2a$:

$$0 = -2 \sin(2\theta)\theta'^2 + \cos(2\theta) \frac{2\rho'\theta'}{\rho} .$$

Soient les solutions $\theta = \theta_0$: les génératrices du conoïde, et

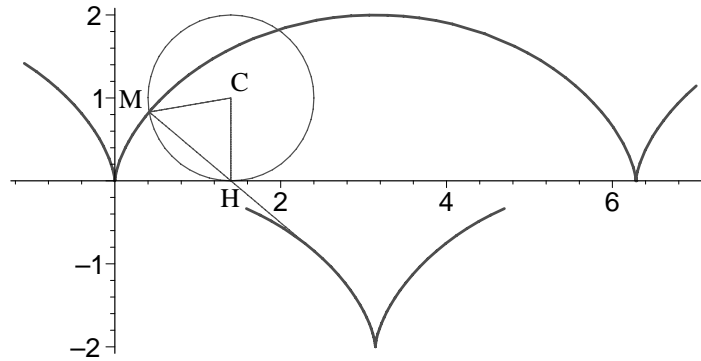
$$2 \frac{\rho'}{\rho} = \frac{-2 \sin(2\theta)\theta'}{\cos(2\theta)}$$

soit $\rho^2 = b \cos(2\theta)$: Les courbes se projettent sur le plan horizontal en lemniscates de Bernoulli.

§ 5. Exemple des cycloïdes

Une cycloïde est la courbe décrite par un point d'un cercle (disons de rayon 1) roulant sans glisser sur une droite, ou un cercle, mais à l'extérieur pour les épicycloïdes et à l'intérieur pour les hypocycloïdes.

1) *La cycloïde.* On écrit que $OM = OH + HC + CM$, (C centre du cercle, H contact avec Ox), sachant que la longueur de l'arc CM , donc l'angle (CM, CH) est égale à celle du vecteur OH (c'est ça qui exprime le roulement sans glissement). On déduit l'angle $(Ox, CM) = (Ox, CH) + (CH, CM) = -(\pi/2) - t$.



Une cycloïde.

Soit, en prenant la longueur t de OH comme paramètre : $M = t + i + e^{i(-\pi/2-t)}$ ou

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\sin t \\ -\cos t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t - \sin t \\ 1 - \cos t \end{pmatrix}$$

d'où

$$D\varphi(t) = \begin{pmatrix} 1 - \cos t \\ \sin t \end{pmatrix} = 2 \sin(t/2) \begin{pmatrix} \sin(t/2) \\ \cos(t/2) \end{pmatrix} = 2 \sin(t/2) u_{\pi/2-t/2}$$

où u_θ est le vecteur unitaire faisant l'angle θ avec Ox (la dérivée de u_θ par rapport à θ est $u_{\theta+\pi/2}$) : en effet en identifiant \mathbf{R}^2 à \mathbf{C} , on a $u_\theta = e^{i\theta}$ dont la dérivée est $ie^{i\theta} = e^{i(\theta+\pi/2)}$. On constate que $t \mapsto t + 2\pi$ induit $M \mapsto M + 2\pi e_1$: la courbe est conservée par une translation de 2π parallèlement à Ox . Et x est fonction impaire de t alors que y est fonction paire de t . On peut donc restreindre l'étude à l'intervalle $t \in [0, \pi]$ dans lequel x et y sont croissants tous deux. Les tangentes aux points limites sont données par la direction de $D\varphi$ (voir le dessin ci-dessus). On constate que la courbe a des points «de rebroussement», où $D\varphi(t) = 0$.

Remarque : La cycloïde est la trajectoire d'un pendule isochrone. En effet, donnons une accélération verticale de valeur g (et non $-g$: mettre la tête à l'envers). Le théorème de l'énergie cinétique donne $\frac{1}{2}v^2 = g(y - y_0)$ où y_0 est l'ordonnée où la vitesse s'annule. Ici, comme t représente le temps, le paramètre sur la cycloïde est noté θ , et on a successivement

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}4 \sin^2(\theta/2)\theta'^2 &= g(1 - \cos \theta - 1 + \cos \theta_0), \\ \sin^2(\theta/2)\theta'^2 &= g[\cos^2(\theta_0/2) - \cos^2(\theta/2)] \\ \frac{\sin(\theta/2)\theta'}{\sqrt{\cos^2(\theta_0/2) - \cos^2(\theta/2)}} &= \sqrt{g} \quad (\sin(\theta/2) \geq 0) \quad \text{et en intégrant,} \\ \arccos \frac{\cos(\theta/2)}{\cos(\theta_0/2)} &= \frac{\sqrt{g}}{2}(t - t_0) \\ \cos(\theta/2) &= \cos(\theta_0/2) \cos\left(\frac{\sqrt{g}}{2}(t - t_0)\right). \end{aligned}$$

Cela donne un mouvement périodique de période $4\pi/\sqrt{g}$, indépendante du point y_0 où le pendule est lâché. Pour réaliser un tel pendule, il suffit de se rappeler que la normale à la cycloïde roule sans glisser sur la développée et que la développée est elle-même une cycloïde (exercice).

2) *L'épicycloïde à un rebroussement.* Un cercle de centre C de rayon un (l'épicycloïde) roule sans glisser sur un cercle de même rayon. On écrit encore $OM = OC + CM$. Le roulement sans glissement s'exprime par l'égalité des arcs HI et IM (I point de contact des cercles, $H = (2, 0)$), soit en notant $t = (Ox, OC)$: $(CI, CM) = 2t$.

$$OM = OC + CM = 2e^{it} + e^{i(t+\pi+t)} = 2e^{it} - e^{i2t} = \begin{pmatrix} 2 \cos(t) - \cos(2t) \\ 2 \sin(t) - \sin(2t) \end{pmatrix}.$$

On remarque que la fonction est périodique de période 2π et que l'abscisse est paire et l'ordonnée impaire. Il suffit de tracer la courbe pour $0 \leq t \leq \pi$ et de compléter par symétrie par rapport à Ox.

$$M' = \begin{pmatrix} -2 \sin(t) + 2 \sin(2t) \\ 2 \cos(t) - 2 \cos(2t) \end{pmatrix} = 4 \sin\left(\frac{t}{2}\right) \begin{pmatrix} \cos(3t/2) \\ \sin(3t/2) \end{pmatrix} = 4 \sin\left(\frac{t}{2}\right) e^{i(3t/2)}.$$

D'où le tableau de variations

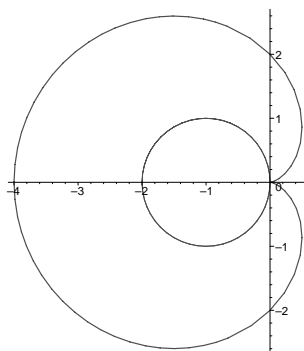
t	0	$\pi/3$	$2\pi/3$	π
x	1 ↗	3/2 ↘	-1/2 ↘	-3
y	0 ↗	$\sqrt{3}/2$ ↗	$3\sqrt{3}/2$ ↘	0

On constate que si l'on prend comme origine le point A d'affixe 1, on obtient

$$AM = 2e^{it} - e^{i2t} - 1 = 2e^{it}[1 - \cos(t)]$$

ce qui donne, en polaires, l'équation $\rho = 2 - 2 \cos(t)$. On voit que l'épicycloïde est obtenue à partir du cercle $\rho = -2 \cos(t)$ en reportant un diamètre sur le rayon vecteur, à partir du point du cercle : c'est aussi une conchoïde du cercle.

L'étude se fait plus facilement en coordonnées polaires ; elle se déduit de l'étude du cosinus. Exercice : refaire l'étude dans ce cadre.



Une épicycloïde à un rebroussement.

3) *L'hypocycloïde à trois rebroussements.* Un cercle de rayon un roule sans glisser à l'intérieur d'un cercle de rayon triple (donc trois). On écrit encore $OM = OC + CM$. Le roulement sans glissement s'exprime par l'égalité des arcs HI et IM (I point de contact des cercles, $H = (3, 0)$), soit en notant $t : (Ox, OC) : (CI, CM) = 3t$ d'où $(Ox, CM) = (Ox, OC) + (CI, CM) = -2t$.

$$OM = 2e^{it} + e^{-i2t} = \begin{pmatrix} 2 \cos t + \cos 2t \\ 2 \sin t - \sin 2t \end{pmatrix}.$$

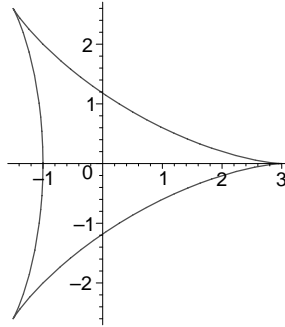
Là encore, on a deux fonctions de période 2π , l'abscisse paire et l'ordonnée impaire. Il suffit donc d'étudier entre 0 et π . Vecteur tangent :

$$D\varphi(t) = \begin{pmatrix} -2 \sin t - 2 \sin 2t \\ 2 \cos t - 2 \cos 2t \end{pmatrix} = 4 \sin(3t/2) \begin{pmatrix} -\cos(t/2) \\ \sin(t/2) \end{pmatrix} = 4 \sin(3t/2) e^{i(\pi-t/2)}$$

Tableau de variations :

t	0	$2\pi/3$	π
x	3	$2\sqrt{2}$	-1
y	0	$\sqrt{2}$	0

Dans une période, $D\varphi(t)$ s'annule pour 0 , $\pi/3$ et $2\pi/3$. La direction de la tangente en ces points est donnée par $e^{i\pi-t/2} = -e^{-it/2}$ qui est la limite du vecteur tangent unitaire.



L'hypocycloïde à trois rebroussements.

REFERENCES

- M. Berger et B. Gostiaux : *Géométrie différentielle : variétés, courbes et surfaces*, PUF, 1987.
 J. Lelong-Ferrand : *Géométrie différentielle*, Dunod, 1963.