TD : Polynômes

09/01/2013

Échauffement (Polynômes symétriques)

1. Déterminer si les polynômes suivants sont symétriques (pour chaque polynôme, les variables sont celles qui apparaissent) :

$$X_1^2+\cdots+X_n^2,\ X_1^3X_2+X_2^3X_3+X_3^3X_1,\ X_1^2(X_2+X_3)+X_2^2(X_1+X_3)+X_3^2(X_1+X_2).$$

2. Pour ceux qui le sont, les exprimer en fonction des polynômes symétriques élémentaires.

Exercice 1. (Identités de Newton)

Soit $n \geq 1$, on se place dans $A = \mathbf{Z}[X_1, \ldots, X_n]$. Pour $d \geq 1$, on note $P_d = X_1^d + \cdots + X_n^d$.

1. Vérifier que P_d est un polynôme symétrique.

2. On veut donner une formule permettant d'exprimer P_d en fonction des polynômes symétriques élémentaires, que l'on note $S_1, \ldots, S_n$. Soit $F(T) = \prod_{i=1}^n (1 - TX_i) \in A[T]$.

a) Montrer que F vérifie l'équation différentielle :

$$-\frac{TF'(T)}{F(T)} = \frac{TX_1}{1-TX_1} + \cdots + \frac{TX_n}{1-TX_n}.$$

b) En utilisant le développement en série formelle de $\frac{1}{1-T}$, en déduire que :

$$F'(T) = -F(T)\left(\sum_{j\geq 1} P_j(X_1, \cdots, X_n)T^{j-1}\right).$$

c) Donner l'identité correspondante pour le coefficient de T^{d-1}.

3. Soit k un corps de caractéristique nulle. On pose $G(T) = \sum_{j\geq 1} \frac{P_j}{j} T^j \in k[X_1, \cdots, X_n, T]$.

a) Montrer que $F(T) = \sum_{i\geq 0} \frac{G(T)^i}{i!}$.

b) En déduire que les S_i s'expriment comme des polynômes en les P_i.

4. Peut-on donner une formule analogue pour exprimer les P_i en fonction des S_i à partir de la formule reliant F et G ?

Exercice 2. (Polynômes antisymétriques)

Soit k un corps de caractéristique nulle, soit $A = k[X_1, \cdots, X_n]$. L'anneau A est muni de l'action naturelle du groupe symétrique $\mathfrak{S}_n$ par permutation des variables. On dit qu'un polynôme $P \in k[X_1, \cdots, X_n]$ est antisymétrique si pour tout $\sigma \in \mathfrak{S}_n$, on a $\sigma P = \varepsilon(\sigma) P$.

1. Soit

$$\Delta = \prod_{1 \leq i < j \leq n} (X_j - X_i).$$

Montrer que Δ est antisymétrique.

2. Soit $P \in A$, antisymétrique. Montrer que P est divisible par Δ dans A.

Exercice 3. (Un produit scalaire sur les polynômes)

Soit k un corps, soit $A = k[X_1, \ldots, X_n]$. Pour $1 \leq i \leq n$, on définit l'opérateur $\frac{\partial}{\partial X_i}$ sur A. Si $P \in A$, on note $P(\partial)$ le polynôme obtenu en substituant les $\frac{\partial}{\partial X_i}$ aux X_i.

1. Vérifier que la substitution précédente a bien un sens, et que pour $P, Q \in A$, on a la relation :

$$PQ(\partial) = P(\partial) \circ Q(\partial).$$

2. Pour $P, Q \in A$, on définit $(P, Q) = P(\partial)(Q)(0, \ldots, 0)$.

a) Montrer que si P et Q sont homogènes de degrés distincts, on a $(P, Q) = 0$.

b) Montrer que si $P, Q, R \in A$, on a la relation :

$$(PQ, R) = (Q, P(\partial)R).$$

3. Si $k = \mathbf{R}$, montrer que $(\cdot, \cdot)$ est un produit scalaire invariant sous l'action du groupe symétrique.

4. Soit Δ comme dans l'exercice 2. Calculer (Δ, Δ).

Exercice 4. (Résultant)

Soit A un anneau intègre unitaire. Pour $d \in \mathbf{N}$, on note A_d l'ensemble des polynômes de degré $\leq d$ dans $A[X]$. Soient $P, Q \in A[X]$, de degrés respectifs p, q.

1. On considère l'application linéaire

$$\varphi \ : \ \begin{array}{ccc} A_{q-1} \times A_{p-1} & \to & A_{p+q-1} \\ (U, V) & \mapsto & UP + VQ. \end{array}$$

Montrer que P et Q sont premiers entre eux si et seulement si φ est bijective.

2. On note $\mathrm{Res}_X(P, Q)$ (appelé résultant en X de P et Q) le déterminant de φ. Montrer que P et Q sont premiers entre eux si et seulement si $\mathrm{Res}(P, Q) \neq 0$.

3. a) Écrire la matrice de φ dans les bases canoniques.

b) En faisant de judicieuses combinaisons linéaires de colonnes, montrer que $\mathrm{Res}_X(P, Q) \in (P) + (Q)$.

4. Soient x, y des nombres algébriques, et soient P, Q des polynômes annulateurs respectifs de x et y.

a) Montrer que $\mathrm{Res}_X(P(X), Q(x+y-X)) = 0$. En déduire que $x+y$ est algébrique.
b) Proposer une construction analogue pour démontrer que xy est algébrique.
c) Peut-on utiliser cette idée pour démontrer que l'ensemble des entiers algébriques forme un sous-anneau de l'ensemble des nombres algébriques ?

Exercice 5. (Théorème de Bezout)

Cet exercice utilise les résultats du précédent. Le but est de montrer que si $P, Q \in k[X, Y]$ n'ont pas de facteur commun, alors les courbes $C_P = \{(x, y) \in k^2 \ / \ P(x, y) = 0\}$ et $C_Q = \{(x, y) \in k^2 \ / \ Q(x, y) = 0\}$ ont au plus $(\deg P)(\deg Q)$ points d'intersection.

1. Calculer un majorant du degré (en X) de $\mathrm{Res}_Y(P, Q)$.

2. On suppose que P et Q sont premiers entre eux.
a) Montrer que C_P et C_Q n'ont qu'un nombre fini de points en commun.
b) Montrer que quitte à faire un changement de variable linéaire, on peut supposer que pour chaque $x \in k$ qui est abscisse d'un point d'intersection de C_P et C_Q, il existe un unique $y \in k$ tel que $(x, y) \in C_p \cap C_Q$.

Exercice 6. (Théorème de Steinitz)

Le but de cet exercice est de démontrer le ***théorème de Steinitz*** : soit k un corps, alors il existe une clôture algébrique k^{alg} de k. Rappelons qu'une clôture algébrique de k est une extension algébrique de k qui est algébriquement close.

1. Expliquer pourquoi il suffit de démontrer que k admet une extension algébriquement close.

2. On considère $R = k[\{X_P \ / \ P \in k[X]\}]$, l'anneau de polynômes à coefficients dans k dont les variables sont indexées par $k[X]$.
a) Soit I l'idéal de R engendré par les éléments de la forme $P(X_P)$, pour $P \in k[X]$. Montrer que I est un idéal propre de R. b) En utilisant le théorème de Krull, en déduire qu'il existe une extension L de k telle que pour tout $P \in k[X]$, P admette une racine dans L.

3. En déduire que k admet une clôture algébrique.