L'exponentielle de $\mathrm{SO}_n(\mathbb{R})$ est surjective

Théorème : *L'exponentielle* $\mathfrak{so}_n(\mathbb{R}) \to \mathrm{SO}_n(\mathbb{R})$ *est surjective.*

Nous allons d'abord décrire l'algèbre de Lie $\mathfrak{so}_n(\mathbb{R})$, puis démontrer le théorème après deux lemmes. La démonstration repose sur deux choses : on traite d'abord le cas $n = 2$, puis on s'y ramène en utilisant la réduction d'une isométrie en une matrice diagonale par blocs avec pour blocs des matrices de rotations planes.

Lemme 1 : $\mathfrak{so}_n(\mathbb{R})$ *est la sous-algèbre de Lie de* $\mathfrak{gl}_n(\mathbb{R}) = \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ *formée des matrices antisymétriques.*

Preuve : L'algèbre de Lie de $\mathrm{SO}_n(\mathbb{R})$ est la même que celle de $\mathrm{O}_n(\mathbb{R})$. Soient $S_n \subset \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ l'espace vectoriel des matrices symétriques, et $f : \mathrm{M}_n(\mathbb{R}) \to S_n$ définie par $f(M) = {}^tMM - \mathrm{Id}$. On a $\mathrm{O}_n(\mathbb{R}) = \{M \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})\,,\, f(M) = 0\}$. Donnons le calcul avec les deux descriptions de l'algèbre de Lie.

Dans la première méthode on montre que f est une submersion en l'identité puis $\mathfrak{so}_n(\mathbb{R}) = \ker(d_{\mathrm{Id}}f)$. Or $f(\mathrm{Id}+H) = (\mathrm{Id}+{}^tH)(\mathrm{Id}+H) - \mathrm{Id} = {}^tH + H + {}^tHH$ de sorte que $d_{\mathrm{Id}}f(H) = {}^tH + H$. Ainsi $d_{\mathrm{Id}}f : \mathrm{M}_n(\mathbb{R}) \to S_n$ est surjective, puisque $A \in S_n$ est l'image de $(1/2)A$, donc f est une submersion au voisinage de l'identité. On trouve bien $\mathfrak{so}_n(\mathbb{R}) = \ker(d_{\mathrm{Id}}f) =$ l'ensemble des matrices antisymétriques.

Dans la deuxième méthode on dit que $\mathfrak{so}_n(\mathbb{R})$ est l'ensemble des $H \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ telles que $\exp(uH) \in \mathrm{O}_n(\mathbb{R})$ pour tout $u \in \mathbb{R}$ (je note u au lieu de t pour ne pas risquer de confusion avec la transposition). Ceci s'exprime par

$$
{}^t\exp(uH)\exp(uH) = \exp(u\,{}^tH)\exp(uH) = \mathrm{Id}\ , \forall u \in \mathbb{R}\ .
$$

Les DL à l'ordre 1 en u sont donc égaux de part et d'autre, d'où $\mathrm{Id} + u({}^tH + H) = \mathrm{Id}$. Il s'ensuit que ${}^tH + H = 0$, cqfd. □

Pour toute $\mathbb{R}$-algèbre unitaire, associative, de dimension finie A, et $x \in A$, on note $\exp_A(x)$ la somme de la série normalement convergente $\sum_{n\geq 0} x^n/n!$.

Lemme 2 : *Soit* $f : A \to B$ *un morphisme d'algèbres unitaires, associatives, de dimension finie. Alors pour tout* $x \in A$ *on a* $f(\exp_A(x)) = \exp_B(f(x))$.

Preuve : Comme f est un morphisme d'algèbres on a $f(\sum_{n=0}^N x^n/n!) = \sum_{n=0}^N f(x)^n/n!$. De plus f est continue comme toute application linéaire entre espaces vectoriels de dimension finie, donc en passant à la limite on trouve le résultat. □

Preuve du théorème : Nous prouvons d'abord le cas $n = 2$. Toute matrice de $\mathrm{SO}_2(\mathbb{R})$ est une matrice de rotation de la forme

$$
R_\theta = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}\ .
$$

Introduisons la matrice :

$$I = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathfrak{so}_2(\mathbb{R}) \ .$$

Comme $I^2 = -1$, l'expression $f(a+bi) = a+bI$ (on note a au lieu de $a\,\mathrm{Id}$) définit un morphisme de $\mathbb{R}$-algèbres $f : \mathbb{C} \to \mathrm{M}_2(\mathbb{R})$. Le résultat en découle puisque d'après le lemme 2,

$$\exp(\theta I) = \exp(f(\theta i)) = f(\exp_{\mathbb{C}}(\theta i)) = f(\cos(\theta) + i\sin(\theta)) = \cos(\theta) + \sin(\theta) I = R_\theta \ .$$

Pour n quelconque, on utilise la réduction des matrices orthogonales. Pour toute matrice $M \in \mathrm{SO}_n(\mathbb{R})$ il existe une matrice orthogonale $P \in \mathrm{O}_n(\mathbb{R})$ telle que PMP^{-1} soit de la forme diagonale par blocs suivante :

$$\mathrm{diag}(\mathrm{Id}_r, R_{\theta_1}, \ldots, R_{\theta_s}) \ .$$

D'après le cas $n = 2$ c'est donc l'exponentielle de la matrice diagonale par blocs

$$\mathrm{diag}(0_r, \theta_1 I, \ldots, \theta_s I) \ ,$$

qui est antisymétrique. Comme l'exponentielle respecte la conjugaison, M est donc l'exponentielle de la matrice

$$P^{-1}\ \mathrm{diag}(0_r, \theta_1 I, \ldots, \theta_s I)\ P \ .$$

Comme P est orthogonale, il est immédiat de vérifier que cette matrice est encore antisymétrique. $\square$

Corollaire : $\mathrm{SO}_n(\mathbb{R})$ est connexe par arcs.

Preuve : C'est l'image par une application continue de $\mathfrak{so}_n(\mathbb{R})$ qui est un espace vectoriel, donc connexe par arcs. $\square$

Remarque : Dans le calcul de $\mathfrak{so}_n(\mathbb{R})$ utilisant la submersion $f : \mathrm{M}_n(\mathbb{R}) \to S_n$ (lemme 1), il faut bien prendre garde que pour avoir $d_{\mathrm{Id}} f$ surjective, l'espace d'arrivée doit être S_n et non $\mathrm{M}_n(\mathbb{R})$.

Bibliographie :

[MT] Mneimné, Testard, Introduction à la théorie des groupes de Lie classiques, *Hermann*.