

## L'exponentielle de $SL_n(\mathbb{C})$ n'est pas surjective

Soit  $G$  un sous-groupe fermé de  $GL_n(\mathbb{C})$ . On définit son algèbre de Lie (voir [MT]) par

$$\mathfrak{g} = \{ M \in M_n(\mathbb{C}) \text{ t.q. pour tout } t \in \mathbb{R}, \exp(tM) \in G \}$$

L'algèbre de Lie de  $GL_n(\mathbb{C})$  est évidemment  $\mathfrak{gl}_n(\mathbb{C}) = M_n(\mathbb{C})$ . Par ailleurs, à partir de la formule  $\det(\exp(M)) = \exp(\text{tr}(M))$  on voit que l'algèbre de Lie de  $SL_n(\mathbb{C})$  est

$$\mathfrak{sl}_n(\mathbb{C}) = \{ M \in M_n(\mathbb{C}) \text{ t.q. } \text{tr}(M) = 0 \}$$

En utilisant la forme de Jordan d'une matrice on démontre que  $\exp: \mathfrak{gl}_n(\mathbb{C}) \rightarrow GL_n(\mathbb{C})$  est surjective, voir [Gou]. Nous allons montrer que ce n'est pas un fait général :

**Théorème :** *L'exponentielle  $\mathfrak{sl}_n(\mathbb{C}) \rightarrow SL_n(\mathbb{C})$  n'est pas surjective.*

La démonstration nécessite deux petits lemmes intéressants pour eux-mêmes. On utilisera la décomposition  $DU$  des matrices inversibles (diagonalisable  $\times$  unipotente) que l'on obtient à partir de la décomposition de Dunford  $D + N$  en mettant  $D$  en facteur. Enfin rappelons que l'indice d'unipotence d'une matrice unipotente  $U$  est défini comme étant égal à l'indice de nilpotence de  $U - \text{Id}$ . L'exponentielle a un bon comportement vis-à-vis de cette décomposition :

**Lemme 1 :** *L'exponentielle d'une matrice nilpotente  $N$  d'indice de nilpotence  $n$  est unipotente d'indice d'unipotence  $n$ . L'exponentielle envoie la décomposition  $D + N$  sur la décomposition  $DU$  (mais le  $D$  n'est pas le même!).*

**Preuve :** Posons  $U = \exp(N)$ . La première assertion découle de :

$$U - \text{Id} = N + \frac{1}{2}N^2 + \dots = N \underbrace{\left( \text{Id} + \frac{1}{2}N + \dots \right)}_{\text{inversible}}$$

Ensuite, si  $P = D + N$  avec  $DN = ND$  alors  $\exp(P) = \exp(D)\exp(N)$ . On pose  $D' = \exp(D)$  qui est diagonalisable, et  $U = \exp(N)$  qui est unipotente. Il est clair que  $D'U = UD'$ .  $\square$

**Lemme 2 :** *Soit  $N$  une matrice nilpotente d'indice de nilpotence  $n$ . Alors, toute matrice commutant avec  $N$  est un polynôme en  $N$ . En particulier une telle matrice n'a qu'une valeur propre.*

**Preuve :** Puisque  $N^{n-1} \neq 0$ , il existe un vecteur  $x \in \mathbb{C}^n$  tel que  $N^{n-1}(x) \neq 0$ . On vérifie que  $\{1, x, N(x), \dots, N^{n-1}(x)\}$  est une famille libre, donc une base de  $\mathbb{C}^n$ . Il en découle que tout vecteur  $y \in \mathbb{C}^n$  s'écrit  $y = \sum a_i N^i(x)$  et est donc l'image de  $x$  par un polynôme en  $N$ , à savoir  $P(N) = \sum a_i N^i$ .

Soit  $C$  une matrice commutant avec  $N$ . Par ce qui précède, il existe un polynôme  $Q$  tel que  $C(x) = Q(N)(x)$ . Pour montrer que  $C = Q(N)$ , il suffit que montrer que  $C(y) = Q(N)(y)$  pour tout vecteur  $y$ . Or on peut écrire  $y = P(N)(x)$  pour un certain polynôme  $P$ , donc

$$C(y) = (C \circ P(N))(x) = (P(N) \circ C)(x)$$

(puisque  $C$  commute avec  $N$  et donc avec tout polynôme en  $N$ )

$$\dots = P(N)(C(x)) = P(N)(Q(N)(x)) = Q(N)(P(N)(x)) = Q(N)(y)$$

On a obtenu  $C = Q(N) = q_0 + q_1N + \dots + q_dN^d$ . La somme des termes de degré  $\geq 1$  est un endomorphisme nilpotent, donc en se plaçant dans une base de trigonalisation de  $N$  on voit que  $C$  a pour seule valeur propre  $q_0$ .  $\square$

**Preuve du théorème :** Soit  $U \in M_n(\mathbb{C})$  unipotente d'indice d'unipotence égal à  $n$ . Soit  $\lambda$  une racine  $n$ -ème de l'unité, de sorte que  $M := \lambda U \in \text{SL}_n(\mathbb{C})$ . Nous allons montrer que si  $\lambda \neq 1$  alors  $M$  n'est pas l'exponentielle d'une matrice de trace nulle.

Supposons avoir une matrice de trace nulle  $P$  telle que  $\exp(P) = M$ . Soit la décomposition  $P = D + N$  avec  $D$  diagonalisable,  $N$  nilpotente, et  $DN = ND$ . On a alors  $\exp(P) = \exp(D)\exp(N)$  qui est la décomposition « diagonalisable  $\times$  unipotent » (lemme 1). Or  $M = \lambda U$  donc par unicité de la décomposition, on obtient  $\exp(D) = \lambda$  et  $\exp(N) = U$ .

L'indice de nilpotence de  $N$  est égal à l'indice d'unipotence de  $U$  (lemme 1) donc  $n$ . D'après le lemme 2, la matrice  $D$  n'a qu'une valeur propre  $\mu$ , donc  $\text{tr}(D) = n\mu$ . Or  $\text{tr}(P) = \text{tr}(D) = 0$  car  $N$  est de trace nulle. Donc  $\mu = 0$  et finalement  $D = 0$ . En conclusion  $\exp(P) = \exp(N)$  ce qui contredit  $M = \lambda \exp(N)$ .  $\square$

**Remarques :** (1) Le résultat classique qui dit que l'exponentielle réalise un difféomorphisme

$$\{ \text{matrices nilpotentes} \} \rightarrow \{ \text{matrices unipotentes} \}$$

n'est pas formellement nécessaire pour ce qui précède, mais il apporte un éclairage intéressant sur le lemme 1 et c'est une bonne idée de l'avoir en tête. (Pour la preuve, lire [MT], chap. 3.)

(2) Le lemme 2 est un cas particulier d'un résultat concernant les endomorphismes *cycliques* (endomorphismes dont le polynôme minimal est de degré  $n$ ) :

«  $u$  est cyclique ssi les seuls endomorphismes commutant avec  $u$  sont les polynômes en  $u$  »

## Bibliographie :

Je ne connais pas de référence pour ce développement, tel quel. On a utilisé :

[Gou] GOURDON, Les Maths en tête, Mathématiques pour M', *Ellipses*.

[MT] MNEIMNÉ, TESTARD, Introduction à la théorie des groupes de Lie classiques, *Hermann*.