Géométrie affine et calcul barycentrique

Exercice 1 Soit (A, B, C) un repère affine du plan. Caractériser en termes de coordonnées barycentriques réduites dans ce repère les sept régions du plan délimitées par les droites (AB), (BC) et (CA).

Exercice 2. Soient E un espace affine et H un hyperplan affine de E. Montrer que la relation $\mathscr{R}$ définie sur $E \setminus H$ par $M\mathscr{R}N$ si et seulement si $[MN] \cap H = \varnothing$ est une relation d'équivalence qui sépare $E \setminus H$ en exactement deux classes.

Exercice 3. Soient ABC un triangle non aplati ; a, b, c les longueurs des côtés ; α, β, γ les angles aux sommets (angles de demi-droites non orientés). Le but de l'exercice est de trouver les coordonnées barycentriques de l'isobarycentre G, du centre du cercle inscrit I, des centres des cercles exinscrits I_A, I_B, I_C, de l'orthocentre H, et du centre du cercle circonscrit O. Du point de vue méthodologique, pour gagner du temps il ne vous est pas demandé de discuter des « conditions de signe » (appartenance à l'intérieur ou l'extérieur d'un triangle, signes des mesures algébriques et sinus ou cosinus d'angles) autrement que par le dessin. Les cas particuliers ne sont pas signalés ; vous êtes invités à les mettre en évidence, en indiquant à chaque fois si le résultat annoncé, éventuellement modifié, est encore valable.

(1) Montrez que $G = \mathrm{bar}((A, 1), (B, 1), (C, 1))$.

(2) Montrez que $I = \mathrm{bar}((A, a), (B, b), (C, c))$.

(3) Montrez que $I_A = \mathrm{bar}((A, -a), (B, b), (C, c))$, et idem pour I_B et I_C.

(4) Montrez que $H = \mathrm{bar}((A, \tan\alpha), (B, \tan\beta), (C, \tan\gamma))$.

(5) Montrez que $O = \mathrm{bar}((A, \sin 2\alpha), (B, \sin 2\beta), (C, \sin 2\gamma))$.

Indication pour (2) *: soient* $I' = \mathrm{bar}((A, a), (B, b), (C, c))$ *et* A_1, B_1, C_1 *les intersections des bissectrices internes avec les côtés. Montrez que* $A_1 = \mathrm{bar}((B, b), (C, c))$*, déduisez-en que* $I' \in (AA_1)$ *puis que* $I' = I$*.*

Indication pour (3) *: adaptez la preuve précédente en notant* A_2, B_2, C_2 *les intersections des bissectrices externes avec les côtés.*

Indication pour (4) *: soient* A', B', C' *les pieds des hauteurs, et* $H' = \mathrm{bar}((A, \tan\alpha), (B, \tan\beta), (C, \tan\gamma))$*. Montrez que* $A' = \mathrm{bar}((B, \tan\beta), (C, \tan\gamma))$*, déduisez-en que* $H' \in (AA')$ *puis que* $H' = H$*.*

Indication pour (5) *: soient* A', B', C' *les milieux des côtés. Utilisant les coordonnées barycentriques de l'orthocentre dans* $A'B'C'$ *(quel est-il ?), montrez que* $O = \mathrm{bar}((A, \tan\beta + \tan\gamma), (B, \tan\alpha + \tan\gamma), (C, \tan\alpha + \tan\beta))$*. Concluez en utilisant le fait que* $\alpha + \beta + \gamma = \pi$*.*

Exercice 4. Soit E un espace affine, f une transformation affine de E et D une droite de E. Montrez que l'ensemble des milieux des segements $[M, f(M)]$ avec $M \in D$ est un point ou une droite.

Exercice 5. Soit ABC un triangle non aplati. On note A_1 le symétrique de B par rapport à C, B_1 le symétrique de C par rapport à A et C_1 le symétrique de A par rapport à B.

(1) Comparez l'aire de $A_1B_1C_1$ avec celle de ABC.

(2) Reconstruisez ABC à partir de $A_1B_1C_1$.

Indication : soient $A_2 = (BC) \cap (B_1C_1)$, $B_2 = (AC) \cap (A_1C_1)$, $C_2 = (AB) \cap (A_1B_1)$. Calculez les coordonnées barycentriques de A, B, C et A_2, B_2, C_2 dans le repère (A_1, B_1, C_1).

Exercice 6. Soit E un plan affine et $\mathscr{B} = (\vec{\imath}, \vec{\jmath})$ une base de sa direction $\vec{E}$. Pour tout triangle ABC, on appelle *aire orientée* de ABC le déterminant $\Delta(ABC) = \frac{1}{2}\det(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$ calculé dans la base $\mathscr{B}$. Cette quantité dépend de l'orientation du triangle, c'est-à-dire de l'ordre de ses sommets, ainsi $\Delta(ACB) = -\Delta(ABC)$. Si A, B, C ne sont pas alignés, montrez que pour tout point M, le triplet $(\Delta(MAB), \Delta(MCA), \Delta(MAB))$ est un système de coordonnées barycentriques du point M dans le repère affine (A, B, C).

Exercice 7. Soit ABC un triangle. On rappelle que la médiatrice Med_A du segment $[BC]$ est l'ensemble des points M tels que $MB = MC$, et que la bissectrice interne en A est l'ensemble des points M tels que $\mathrm{dist}(M, [AB]) = \mathrm{dist}(M, [AC])$.

(1) Montrez que la hauteur en A est l'ensemble des points M tels que $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB} = \overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MC}$.

(2) Montrez que la médiane en A est l'ensemble des points M tels que $\overrightarrow{MA} \wedge \overrightarrow{MB} = \overrightarrow{MC} \wedge \overrightarrow{MA}$, ou encore tels que $\Delta(MAB) = \Delta(MCA)$. (On désigne par $\wedge$ le produit extérieur et Δ l'aire orientée.)

(3) Déduisez-en une stratégie de démonstration uniforme pour la concourance des médiatrices, des bissectrices internes, des hauteurs, des médianes.

(4) Quel est l'ensemble des points M tels que $\mathrm{dist}(M, (AB)) = \mathrm{dist}(M, (AC))$? Quel est l'ensemble des points M tels que $\mathrm{Aire}(MAB) = \mathrm{Aire}(MCA)$? Quels résultats de concourance obtient-on ?