Arithmétique des anneaux de fonctions holomorphes

David Bourqui

Ce texte traite de quelques propriétés algébriques de l'anneau $\mathcal{H}(\mathbf{C})$ des fonctions holomorphes sur $\mathbf{C}$. Nous verrons que bien que cet anneau ne soit pas factoriel, il possède une arithmétique intéressante (existence de pgcd et d'identités de Bézout), intimement liée aux propriétés des zéros des fonctions holomorphes. Nous renverrons au livre de Rudin *Analyse réelle et complexe* (noté ARC par la suite) pour la démonstration de ces propriétés et nous nous concentrerons sur les conséquences algébriques de ces résultats. Prenez-y garde si vous utilisez les résultats exposés ici pour illustrer une leçon : il faut être bien conscient de la nature des résultats admis. Plus précisément, jusqu'à la section 4 incluse, nous ne ferons appel qu'aux propriétés des fonctions holomorphes figurant explicitement au programme de l'agrégation (dont le théorème des zéros isolés). On y montre notamment que $\mathcal{H}(\mathbf{C})$ n'est ni factoriel, ni noethérien. Dans la section 5 nous utiliserons en outre le théorème de Weierstraß (théorème 5.1), sorte de réciproque du théorème des zéros isolés, qui permet en particulier de montrer l'existence de pgcd et de ppcm. Ce théorème est à la portée d'un agrégatif, mais est loin d'être facile. On donne dans ce texte l'idée intuitive de la démonstration, mais la vraie démonstration est assez technique. Finalement dans la section 6 nous utilisons le théorème de Weierstraß joint au théorème de Mittag-Leffler (qui assure l'existence de fonctions méromorphes de parties polaires prescrites) pour montrer que $\mathcal{H}(\mathbf{C})$ est un anneau de Bézout (tout idéal de type fini est principal). Tout comme le théorème de Weierstraß, le théorème de Mittag-Leffler est à la portée d'un agrégatif mais n'est pas un résultat facile. La démonstration donnée dans ARC fait appel à un délicat résultat d'approximation de Runge. Vous trouverez également une démonstration plus élémentaire dans un texte de Bachir Bekka sur le site de la prépa agreg de Rennes, qui se limite au cas des fonctions méromorphes sur $\mathbf{C}$, cas qui nous suffit ici[1]. Je remercie les

[1]On travaille dans ce texte sur l'anneau des fonctions holomorphes sur $\mathbf{C}$, mais on peut cependant noter que les résultats sont également valables pour l'anneau des fonctions holomorphes sur un ouvert connexe non vide de $\mathbf{C}$.

collègues qui ont relu les premières versions de ce texte pour leurs corrections et commentaires.

1 Éléments inversibles

Lemme 1.1. *Les éléments inversibles de* $\mathcal{H}(\mathbf{C})$ *sont les fonctions qui ne s'annulent pas.*

Démonstration. Si une fonction entière f ne s'annule pas, alors la fonction $\frac{1}{f}$ est holomorphe sur $\mathbf{C}$ (cf. ARC, §10.3). Ainsi f est inversible dans $\mathcal{H}(\mathbf{C})$.

Réciproquement, supposons que $f, g \in \mathcal{H}(\mathbf{C})$ vérifient $f\,g = 1$. Pour tout $z \in \mathbf{C}$, on a donc $f(z)\,g(z) \neq 0$. Ainsi f et g ne s'annulent pas sur $\mathbf{C}$. $\square$

2 Intégrité

Pour $f \in \mathcal{H}(\mathbf{C})$, on note $\mathscr{Z}(f) \subset \mathbf{C}$ l'ensemble des zéros de f. Le résultat suivant, qui découle de l'analyticité des fonctions holomorphes, est une propriété absolument fondamentale de $\mathscr{Z}(f)$ (cf. ARC, Théorème 10.18).

Théorème 2.1 (des zéros isolés)**.** *Si* $f \in \mathcal{H}(\mathbf{C})$ *est non nulle, l'ensemble* $\mathscr{Z}(f)$ *ne possède pas de point d'accumulation.*

Rappelons qu'une partie de $\mathbf{C}$ est sans point d'accumulation si et seulement si son intersection avec tout compact est finie. Ainsi une union *finie* et une intersection *quelconque* d'ensembles sans point d'accumulation est encore un ensemble sans point d'accumulation.

Nous verrons un peu plus loin qu'on ne peut rien dire de plus en général de $\mathscr{Z}(f)$ (théorème de Weierstraß) ce qui aura des conséquences intéressantes sur l'arithmétique de $\mathcal{H}(\mathbf{C})$. En attendant, le théorème des zéros isolés permet de montrer l'intégrité de $\mathcal{H}(\mathbf{C})$.

Lemme 2.2. $\mathcal{H}(\mathbf{C})$ *est un anneau intègre.*

Démonstration. Soient f, g deux éléments non nuls de $\mathcal{H}(\mathbf{C})$. Comme $\mathscr{Z}(f)$ et $\mathscr{Z}(g)$ sont sans point d'accumulation et que $\mathscr{Z}(f\,g) = \mathscr{Z}(f) \cup \mathscr{Z}(g)$, $\mathscr{Z}(f\,g)$ n'a pas non plus de point d'accumulation. En particulier, $\mathscr{Z}(f\,g)$ est distinct de $\mathbf{C}$ et $f\,g$ n'est pas nul. $\square$

On note $\mathcal{M}(\mathbf{C})$ le corps des fractions de $\mathcal{H}(\mathbf{C})$. Tout élément de $\mathcal{M}(\mathbf{C})$ s'écrit donc formellement comme un quotient $\frac{f}{g}$ où $f \in \mathcal{H}(\mathbf{C})$ et $g \in \mathcal{H}(\mathbf{C}) \setminus$

$\{0\}$. On identifie un tel quotient à la fonction méromorphe[2] $z \mapsto \frac{f(z)}{g(z)}$. Un tel quotient est un élément de $\mathcal{H}(\mathbf{C})$ si et seulement si la fonction méromorphe qu'il définit se prolonge en une fonction holomorphe sur $\mathbf{C}$.

3 Divisibilité

Pour étudier la divisibilité dans l'anneau $\mathcal{H}(\mathbf{C})$ il est pratique d'introduire le formalisme suivant. On munit l'ensemble $\mathbf{Z} \cup \{+\infty\}$ d'une « addition »notée $+$ et étendant l'addition usuelle sur $\mathbf{Z}$ et telle que pour tout $n \in \mathbf{Z} \cup \{+\infty\}$, on a

$$n + (+\infty) = (+\infty) + n = +\infty.$$

On définit sur ce même ensemble une relation d'ordre $\leqslant$ par $n \leqslant m$ si et seulement s'il existe $n' \in \mathbf{N} \cup \{+\infty\}$ tel que $m = n + n'$. Cette relation étend donc la relation d'ordre usuelle sur $\mathbf{Z}$. L'addition dans $\mathbf{Z} \cup \{+\infty\}$ induit une addition « point par point »sur l'ensemble des fonctions $\mathbf{C} \to \mathbf{Z} \cup \{+\infty\}$. De même, la relation d'ordre $\leqslant$ induit une relation d'ordre (partiel) sur l'ensemble des fonctions $\mathbf{C} \to \mathbf{Z} \cup \{\infty\}$, définie par $\mu \leqslant \nu$ si et seulement si $\mu(z) \leqslant \nu(z)$ pour tout $z \in \mathbf{C}$. On pourra remarquer que toute famille (f_i) de fonctions $\mathbf{C} \to \mathbf{N} \cup \{+\infty\}$ admet une borne inférieure pour cette relation d'ordre : c'est la fonction $z \mapsto \operatorname{Inf}_{i\in I} f_i(z)$. Une remarque analogue vaut pour la borne supérieure.

Pour $f \in \mathcal{H}(\mathbf{C}) \setminus \{0\}$, notons μ_f la fonction « indicatrice des zéros de f comptés avec multiplicités ». Plus précisément, il s'agit de l'application $\mu_f : \mathbf{C} \to \mathbf{N}$ qui à $z \in \mathbf{C}$ associe la multiplicité du zéro de f en z. On définit la fonction μ_0 comme étant la fonction constante sur $\mathbf{C}$ égale à $+\infty$. Ainsi pour tout $f \in \mathcal{H}(\mathbf{C})$ on a $\mu_f(z) = 0$ si et seulement si $f(z) \neq 0$, et $\mathscr{Z}(f) = \mu_f^{-1}(\mathbf{Z}_{\geqslant 1})$, où $\mathbf{Z}_{\geqslant 1} = \{n \in \mathbf{Z} \cup \{+\infty\},\ n \geqslant 1\}$. Par ailleurs f est inversible dans $\mathcal{H}(\mathbf{C})$ si et seulement si μ_f est nulle.

En utilisant le théorème 10.18 de ARC, on vérifie qu'on a

$$\forall f, g \in \mathcal{H}(\mathbf{C}), \quad \mu_{fg} = \mu_f + \mu_g. \tag{1}$$

On peut étendre la définition de μ_f aux éléments de $\mathcal{M}(\mathbf{C})$: si $f \in \mathcal{M}(\mathbf{C})$ est non nulle et s'écrit $\frac{g}{h}$, où $g \in \mathcal{H}(\mathbf{C})$ et $h \in \mathcal{H}(\mathbf{C}) \setminus \{0\}$, on pose $\mu_f = \mu_g - \mu_h$. La relation (1) montre que cette définition ne dépend pas du choix de g et h. Cette même relation s'étend alors aux éléments de $\mathcal{M}(\mathbf{C})$.

[2]Tout élément de $\mathcal{M}(\mathbf{C})$ est donc une fonction méromorphe. Bien que nous n'en ayons pas besoin ici, il faut souligner que la réciproque est vraie, i.e. $\mathcal{M}(\mathbf{C})$ est le corps des fontions méromorphes sur $\mathbf{C}$. Ceci découle en fait du théorème de Weierstraß cité plus loin, cf. ARC Théorème 15.12

Proposition 3.1. *Soit $f \in \mathcal{M}(\mathbf{C})$. Alors $\mu_f \geqslant 0$ (i.e. $\mu_f(z) \geqslant 0$ pour tout $z \in \mathbf{C}$) si et seulement si $f \in \mathcal{H}(\mathbf{C})$.*

Démonstration. Si $f \in \mathcal{H}(\mathbf{C})$, on a bien sûr $\mu_f \geqslant 0$. Soit à présent $f \in \mathcal{M}(\mathbf{C})$ s'écrivant $f = \frac{g}{h}$ avec $g \in \mathcal{H}(\mathbf{C}) \setminus \{0\}$ et $h \in \mathcal{H}(\mathbf{C}) \setminus \{0\}$ vérifiant $\mu_g \geqslant \mu_h$. Il s'agit de montrer que la fonction f se prolonge en une fonction holomorphe sur $\mathbf{C}$. Or au voisinage de $z_0 \in \mathscr{Z}(h)$, h s'écrit $(z-z_0)^{\mu_h(z_0)}\widetilde{h}(z)$, où $\widetilde{h}$ est holomorphe et non nulle en z_0, et g s'écrit $(z-z_0)^{\mu_g(z_0)}\widetilde{g}(z)$, où $\widetilde{g}$ est holomorphe. Comme on a par hypothèse $\mu_g(z_0) \geqslant \mu_h(z_0)$, la fonction $z \mapsto (z-z_0)^{\mu_g(z_0)-\mu_h(z_0)} \frac{\widetilde{g}(z)}{\widetilde{h}(z)}$ est holomorphe au voisinage de z_0. Comme elle coïncide avec f, on a le résultat. $\square$

Ceci étant, on obtient la caractérisation suivante de la divisibilité dans $\mathcal{H}(\mathbf{C})$.

Proposition 3.2. *Soit $f, g \in \mathcal{H}(\mathbf{C})$. Alors f divise g (dans $\mathcal{H}(\mathbf{C})$) si et seulement si $\mu_f \leqslant \mu_g$.*

Autrement dit, f divise g si et seulement si les zéros de f sont des zéros de g et ont une multiplicité inférieure.

Démonstration. Si f divise g, il existe $h \in \mathcal{H}(\mathbf{C})$ tel que $g = f\,h$. On a donc d'après (1) $\mu_g = \mu_f + \mu_h$, d'où (comme $\mu_h \geqslant 0$) $\mu_h \leqslant \mu_g$. Réciproquement, supposons $\mu_f \leqslant \mu_g$. Si f est nulle, on a $\mu_g \geqslant \mu_0$ donc g est nulle, et f divise g. Si f est non nulle, la fonction méromorphe $h \overset{\text{déf}}{=} \frac{g}{f}$ vérifie $\mu_h = \mu_g - \mu_f \geqslant 0$. D'après la proposition précédente, on a $h \in \mathcal{H}(\mathbf{C})$. $\square$

4 Factorialité

L'anneau $\mathcal{H}(\mathbf{C})$ étant intègre, on peut se demander s'il est factoriel (voire principal). Dans cette optique, déterminons d'abord les éléments irréductibles de $\mathcal{H}(\mathbf{C})$.

Proposition 4.1. *Less éléments irréductibles de $\mathcal{H}(\mathbf{C})$ sont (à multiplication par des éléments inversibles près) les fonctions $f_{z_0} : z \mapsto z - z_0$, où z_0 décrit $\mathbf{C}$.*

Démonstration. Montrons tout d'abord que f_{z_0} est bien irréductible. Si g divise f_{z_0}, on a $\mu_g \leqslant \mu_{f_{z_0}}$. Comme $\mu_{f_{z_0}}(z_0) = 1$ et $\mu_{f_{z_0}}(z) = 0$ pour $z \neq z_0$, il découle facilement de l'inégalité précédente qu'on doit avoir $\mu_g = 0$ ou $\mu_g = \mu_{f_{z_0}}$. Si $\mu_g = 0$, g est inversible. Si $\mu_g = \mu_{f_{z_0}}$, on a $\mu_{\frac{f_{z_0}}{g}} = 0$ donc $\frac{f_{z_0}}{g}$ est un élément inversible de $\mathcal{H}(\mathbf{C})$.

Réciproquement, soit f un élément irréductible de $\mathcal{H}(\mathbf{C})$. Comme f n'est pas inversible, il existe $z_0 \in \mathbf{C}$ tel que $f(z_0) = 0$. En particulier, d'après le théorème 10.18 de ARC, f_{z_0} divise f. Comme f_{z_0} est également irréductible, ceci montre que $\frac{f}{f_{z_0}}$ est inversible. □

Proposition 4.2. *L'anneau* $\mathcal{H}(\mathbf{C})$ *n'est pas factoriel.*

En particulier, $\mathcal{H}(\mathbf{C})$ n'est pas principal (cf. ci-dessous pour un exemple explicite d'idéal non principal).

Démonstration. Raisonnons par l'absurde et supposons que $\mathcal{H}(\mathbf{C})$ soit factoriel. Ainsi, d'après la proposition précédente, tout élément f de $\mathcal{H}(\mathbf{C})$ non nul et non inversible s'écrit $f = u \prod_{i \in I}(z - z_i)$ où u est inversible, I est un ensemble fini et les z_i sont des éléments de $\mathbf{C}$. En particulier, tout élément non nul de $\mathcal{H}(\mathbf{C})$ n'a qu'un nombre fini de zéro. Mais la fonction entière $z \mapsto \sin(z)$ est non nulle et a une infinité de zéros, d'où une contradiction. □

Le lecteur attentif aura noté que l'on a nié «fortement» la factorialité de $\mathcal{H}(\mathbf{C})$. Plus précisément, rappelons qu'un anneau intègre est factoriel si tout élément non nul et non inversible s'écrit comme un produit d'éléments irréductibles (propriété d'existence) et qu'*en outre* une telle décomposition est unique, à permutation des facteurs et multiplication par des inversibles près (propriété d'unicité). La propriété d'unicité est une caractéristique absolument cruciale des anneaux factoriels (à ce titre d'ailleurs, la terminologie anglo-saxonne *unique factorization domain* est bien meilleure que la terminologie française). Demander qu'un anneau vérifie seulement la propriété d'existence est beaucoup moins exigeant. Par exemple tous les anneaux intègre noethériens la possèdent (cf. Perrin, *Cours d'Algèbre*, proposition 3.17), sans pour autant être factoriels en général (exemple : $\mathbf{Z}[i\sqrt{5}]$). Or, la démonstration ci-dessus montre que $\mathcal{H}(\mathbf{C})$ ne possède même pas la propriété d'existence. Ainsi $\mathcal{H}(\mathbf{C})$ n'est pas noethérien. Exhibons à présent explicitement un idéal qui n'est pas de type fini (donc en particulier non principal). Pour $n \in \mathbf{N}$, on note f_n la fonction $z \mapsto \frac{\sin(\pi z)}{z(z-1)\ldots(z-n)}$. Soit $\mathfrak{I}$ l'idéal engendré par les f_n, pour $n \in \mathbf{N}$.

Proposition 4.3. *L'idéal* $\mathfrak{I}$ *n'est pas de type fini.*

Démonstration. Pour $n \in \mathbf{N}$, on a $\mathscr{Z}(f_n) = \{m \in \mathbf{Z},\, m < 0 \text{ ou } m \geqslant n+1\}$. En particulier, si f est un élément de $\mathfrak{I}$, il existe $N_f \in \mathbf{N}$ tel que $\mathscr{Z}(f)$ contient $\{m \in \mathbf{N},\, m \geqslant N_f\}$. Si $\mathfrak{I}$ était de type fini, engendré par $g_1, \ldots, g_k$, en posant $N \overset{\text{déf}}{=} \operatorname{Max}_{1 \leqslant i \leqslant k} N_{g_i}$, on aurait pour pour tout $f \in \mathfrak{I}$ l'inclusion $\{m \in \mathbf{N},\, m \geqslant N\} \subset \mathscr{Z}(f)$ et en particulier $N \in \mathscr{Z}(f)$. Mais f_N est dans $\mathfrak{I}$ et $f_N(N) \neq 0$, contradiction. □

On remarquera que pour exhiber un idéal non principal de $\mathcal{H}(\mathbf{C})$, on a dû aller chercher un idéal qui n'est pas de type fini. On verra ci-dessous que ce n'est pas par manque d'imagination : tout idéal de type fini de $\mathcal{H}(\mathbf{C})$ est principal.

5 Théorème de Weierstraß et applications

Nous allons à présent montrer que l'anneau $\mathcal{H}(\mathbf{C})$, bien que non factoriel et non noethérien, possède néanmoins des propriétés arithmétiques intéressantes. Un outil essentiel est le théorème de Weierstraß énoncé ci-dessous, qui consitue une sorte de réciproque du théorème des zéros isolés.

5.1 Énoncé

Si $\mu : \mathbf{C} \to \mathbf{N}$ est une fonction, on peut se demander s'il existe $f \in \mathcal{H}(\mathbf{C})$ tel que $\mu = \mu_f$. D'après le théorème des zéros isolés, une condition nécessaire pour qu'il en soit ainsi est que $\mu^{-1}(\mathbf{Z}_{\geqslant 1})$ soit sans point d'accumulation. Le théorème suivant montre que cette condition est suffisante.

Théorème 5.1 (Weierstraß)**.** *Soit $\mu : \mathbf{C} \to \mathbf{N}$ une fonction telle que $\mu^{-1}(\mathbf{Z}_{\geqslant 1})$ soit sans point d'accumulation. Alors il existe $f \in \mathcal{H}(\mathbf{C})$ telle que $\mu_f = \mu$.*

Pour la démonstration, cf. ARC, Théorèmes 15.9 et 15.11. La démonstration est constructive et exhibe explicitement une fonction f ayant les propriétés requises. En fait, on voit aussitôt que le résultat est vrai si $\mu^{-1}(\mathbf{Z}_{\geqslant 1})$ est fini : on prend alors pour f un polynôme ayant la factorisation adéquate. Le cas général s'obtient en construisant une fonction se factorisant sous forme d'un produit infini ad hoc. Plus précisément, il est facile de voir qu'on est ramené au problème suivant : construire, pour toute suite (z_n) de nombres complexes non nuls dont le module tend vers $+\infty$, une fonction entière f dont les zéros sont exactement les z_n et telle que l'ordre d'un zéro est le nombre de fois où il apparaît dans la suite. La réponse naïve à ce problème est donnée par le produit infini

$$\prod_{n=0}^{+\infty} \left(1 - \frac{z}{z_n}\right)$$

mais malheureusement ce produit ne converge pas si $|z_n|$ ne tend pas assez vite vers $+\infty$. Il s'agit alors de modifier un peu ce produit par des fonctions inversibles adéquates afin de le rendre convergent.

Ce résultat effectif permet d'ailleurs de montrer qu'il existe quand même un résultat d'existence de décomposition en produit d'irréductibles dans $\mathcal{H}(\mathbf{C})$ (voire même d'unicité dans certains cas) à condition d'admettre des produits infinis : c'est le théorème de factorisation de Weierstraß (cf. ARC, Théorème 15.10).

5.2 Applications arithmétiques

Proposition 5.2. *Toute famille d'éléments de $\mathcal{H}(\mathbf{C})$ admet un pgcd et un ppcm.*

Démonstration. Soit $(f_i)_{i\in I}$ une famille d'éléments de $\mathcal{H}(\mathbf{C})$ que l'on peut supposer non nuls. Soit $\mu = \mathrm{Inf}_{i\in I}\,\mu_{f_i}$. Comme $\mu^{-1}(\mathbf{Z}_{\geqslant 1}) = \cap_{i\in I}\mu_{f_i}^{-1}(\mathbf{Z}_{\geqslant 1})$, $\mu^{-1}(\mathbf{Z}_{\geqslant 1})$ est sans point d'accumulation. D'après le théorème de Weierstraß, il existe $f \in \mathcal{H}(\mathbf{C})$ tel que $\mu = \mu_f$. D'après la proposition 3.2, f divise chaque f_i. D'après cette même proposition, si g divise tous les f_i, on a $\mu_g \leqslant \mu$, donc g divise f. Ainsi f est un pgcd de la famille $(f_i)_{i\in I}$.

Pour démontrer l'existence du ppcm de la famille $(f_i)_{i\in I}$, on considère cette fois $\nu \overset{\text{déf}}{=} \mathrm{Sup}_{i\in I}\,\mu_{f_i}$. Ainsi ν est une fonction $\mathbf{C} \to \mathbf{N}\cup\{+\infty\}$. Deux cas peuvent se produire :

1. On a $\nu(\mathbf{C}) \subset \mathbf{N}$ et $\nu^{-1}(\mathbf{Z}_{\geqslant 1})$ est sans point d'accumulation. Il existe alors $f \in \mathcal{H}(\mathbf{C})$ tel que $\mu_f = \nu$ et f est d'après la proposition 3.2 un ppcm de la famille considérée.
2. On a $\nu^{-1}(\{+\infty\}) \neq \varnothing$ ou $\nu^{-1}(\mathbf{Z}_{\geqslant 1})$ a un point d'accumulation. Comme tout multiple commun g des f_i vérifie $\mu_g \geqslant \nu$, la fontion nulle est le seul multiple commun des f_i. C'est donc le ppcm de la famille (f_i).

□

Remarquons que dans le cas d'une famille finie d'éléments non nuls, la fonction ν introduite dans la démonstration vérifie $\nu(\mathbf{C}) \subset \mathbf{N}$ et $\nu^{-1}(\mathbf{Z}_{\geqslant 1})$ est sans point d'accumulation. Ainsi dans ce cas le ppcm est non nul.

Soit $\mu : \mathbf{C} \to \mathbf{N}\cup\{+\infty\}$ une fonction. On vérifie facilement que

$$\mathcal{I}_\mu \overset{\text{déf}}{=} \{f \in \mathcal{H}(\mathbf{C}), \quad \mu_f \geqslant \mu\}$$

est un idéal de $\mathcal{H}(\mathbf{C})$.

Proposition 5.3. *$\mathcal{I}_\mu$ est un idéal principal.*

Démonstration. Si $\mu^{-1}(+\infty) \neq \varnothing$ ou si $\mu^{-1}(\mathbf{Z}_{\geqslant 1})$ a un point d'accumulation, $\mathcal{I}_\mu$ est nul. Sinon, d'après le théorème de Weierstraß il existe $f \in \mathcal{H}(\mathbf{C})$ tel que $\mu_f = \mu$. Un tel f est dans $\mathcal{I}_\mu$ et d'après la proposition 3.2 divise tous les éléments de $\mathcal{I}$. □

6 Propriété de Bézout

On va montrer à présent que $\mathcal{H}(\mathbf{C})$, bien que non principal, est ce qu'on appelle un anneau de Bézout. Le lemme suivant précise cette terminologie.

Lemme 6.1. *Soit A un anneau intègre. Les propriétés suivantes sont équivalentes :*

1. *tout idéal de type fini de A est principal ;*
2. *A admet des identités de Bézout : si $a, b \in A$, alors a et b admettent un pgcd δ, et δ appartient à l'idéal engendré par a et b, i.e. il existe $\alpha, \beta \in A$ tels que*
$$\alpha\, a + \beta\, b = \delta.$$

Les anneaux vérifiant les propriétés 1. ou 2. ci-dessus sont appelés anneaux de Bézout.

Démonstration. Supposons que tout idéal de type fini de A soit principal. Soit $a, b \in A$. Soit δ un générateur de l'idéal $a\,A + b\,A$. Il s'agit de montrer que δ est un pgcd de a et b. Comme $a, b \in \delta\, A$, δ divise a et b. En outre, si δ' divise a et b, δ' divise tout élément de l'idéal $a\,A + b\,A$, en particulier δ' divise δ.

Réciproquement, supposons que A admette des identités de Bézout et montrons que tout idéal de type fini est principal. Par une récurrence facile sur le nombre de générateurs, on est ramené à montrer que si $a, b \in A$ l'idéal $a\,A + b\,A$ est principal. Soit δ un pgcd de a et b. Comme δ divise a et b, on a $a\,A + b\,A \subset \delta\,A$. Mais par hypothèse on a $\delta \in a\,A + b\,A$. Ainsi $a\,A + b\,A = \delta\,A$. □

Bien évidemment, tout anneau de Bézout noethérien est principal. C'est un exercice laissé à la lectrice (ou au lecteur) que de montrer que tout anneau de Bézout factoriel est également principal, et de vérifier que les anneaux de Bézout vérifient le lemme de Gauss (si a divise $b\,c$ et a et b sont premiers entre eux, alors a divise c) donc le lemme d'Euclide (tout élément irréductible est premier).

On va à présent démontrer que $\mathcal{H}(\mathbf{C})$ est un anneau de Bézout. L'outil analytique est le théorème d'interpolation suivant, conséquence du théorème de Weierstraß et du théorème de Mittag-Leffler (cf. ARC, Théorème 15.13 ou le texte de Bachir Bekka sur le site de la prépa agreg de Rennes) permettant de construire des fonctions méromorphes de parties polaires prescrites.

Théorème 6.2. *Soit A une partie de $\mathbf{C}$ qui n'a pas de point d'accumulation. Pour $z \in A$, soit $\nu_z \geqslant 0$ un entier et $(w_{z,k})_{0 \leqslant k \leqslant \nu_z}$ une famille de nombres* *complexes. Il existe alors $\alpha \in \mathcal{H}(\mathbf{C})$ vérifiant, pour tout $z \in A$ et tout $k \in \{0,\dots,\nu_z\}$, $\alpha^{(k)}(z) = w_{z,k}$.*

Pour la démonstration, cf. ARC, Théorème 15.15.

Théorème 6.3. *L'anneau $\mathcal{H}(\mathbf{C})$ est un anneau de Bézout.*

Ainsi $\mathcal{H}(\mathbf{C})$ est un exemple d'anneau de Bézout non principal.

Démonstration. Soient $f, g \in \mathcal{H}(\mathbf{C})$. On sait déjà que f et g admettent un pgcd. Il suffit donc de montrer que ce pgcd est dans l'idéal engendré par f et g. En divisant f et g par leur pgcd, on se ramène à traiter uniquement le cas où le pgcd de f et g est 1. Il s'agit alors de montrer le résultat suivant : si f et g sont deux éléments non nuls de $\mathcal{H}(\mathbf{C})$ n'ayant pas de zéro commun, il existe des éléments $\alpha, \beta \in \mathcal{H}(\mathbf{C})$ vérifiant

$$\alpha\, f + \beta\, g = 1.$$

En d'autres termes, il faut montrer qu'il existe $\alpha \in \mathcal{H}(\mathbf{C})$ tel que g divise $\alpha\, f - 1$. De manière équivalente, on cherche donc $\alpha \in \mathcal{H}(\mathbf{C})$ vérifiant

$$\forall z \in \mathscr{Z}(g), \quad \forall k \in \{0,\dots,\mu_g(z)-1\}, \quad (\alpha\, f - 1)^{(k)}(z) = 0.$$

Ces conditions se réécrivent

$$\forall z \in \mathscr{Z}(g), \quad \left\{ \begin{array}{lll} \alpha(z)\, f(z) & = 1 & \\ \alpha^{(k)}(z)\, f(z) & = -\sum_{\ell=0}^{k-1} \mathrm{C}_k^\ell\, \alpha^{(\ell)}(z)\, f^{(k-\ell)}(z) & k \in \{1,\dots,\mu_g(z)-1\} \end{array} \right. \tag{2}$$

Comme f et g n'ont pas de zéro commun, $f(z)$ est non nul pour $z \in \mathscr{Z}(g)$. Ainsi pour $z \in \mathscr{Z}(g)$ le système d'équations ci-dessus est un système triangulaire en les inconnues $\alpha(z), \dots, \alpha^{(\mu_g(z)-1)}(z)$. Les conditions (2) peuvent donc se réécrire

$$\forall z \in \mathscr{Z}(g), \quad \left\{ \begin{array}{rcl} \alpha(z) & = & 1/f(z) \\ \alpha'(z) & = & w_{z,1} \\ & \vdots & \\ \alpha^{(\mu_g(z)-1)}(z) & = & w_{z,\mu_g(z)-1} \end{array} \right. \tag{3}$$

où, pour $z \in \mathscr{Z}(g)$, les $(w_{z,k})_{1 \leqslant k \leqslant \mu_g(z)-1}$ sont des nombres complexes (s'exprimant en fonction de $1/f(z), f'(z), \dots, f^{(\mu_g(z)-1)}(z)$).

Le théorème 6.2 permet de conclure. □