Université de Rennes 1
Préparation à l'agrégation
de mathématiques
Auteur du document :

M. Coste

Développement : classification des homographies du plan projectif réel

Michel Coste

Novembre 2001

Ce développement peut se placer en géométrie projective, et aussi comme application de la réduction des endomorphismes ou des sous-espaces stables.

La référence est le livre de Sidler [Sid], page 38. Deux petites coquilles dans cette page : lire « En supprimant le cas II » à la quatrième ligne, et remplacer le premier b par un a pour le cas V. Le matériel à mobiliser pour ce développement est

- un minimum de géométrie projective, en particulier la notion d'homographie,
- la connaissance de la réduction des matrices réelles 3×3.

La classification proposée dans le tableau de Sidler n'est pas une liste des classes de conjugaison dans le groupe des homographies. Il n'y a que les types IV et VI qui correspondent à une seule classe de conjugaison : il y a une seule valeur propre que l'on peut supposer égale à 1 (on est dans PGL). Les autres types regroupent chacun une infinité de classes de conjugaison. À noter que l'identité ne figure pas dans le tableau.

L'intérêt majeur est de décrire les points fixes et les droites stables des homographies suivant la réduction des matrices qui les représentent : ils correspondent respectivement aux droites vectorielles stables et aux plans vectoriels stables dans l'espace vectoriel de dimension 3. Les droites vectorielles stables sont engendrées par les vecteurs propres. Par dualité, les plans vectoriels stables sont les orthogonaux (pour le crochet de dualité) des vecteurs propres de la transposée. Or, la transposée d'une matrice A est semblable à A et a donc même réduction que A. Ceci montre qu'une homographie du plan projectif a autant de points fixes que de droites stables (et que s'il y a une droite fixe point par point, il y a aussi un faisceau de droites stables). Ces considérations de dualité éclairent la recherche des droites stables. Par exemple, dans le cas III du tableau de Sidler on a une droite fixe point par point et un autre point fixe en dehors de cette droite. Dualement, on a un faisceau de droites stables et une autre droite stable n'appartenant pas au faisceau.

Pour l'orthogonalité entre sous-espaces stables d'un endomorphisme et sous-espaces stables du transposé, on peut voir le livre de Gourdon [Gou], p. 129-130. Citons le rapport du jury de 1997 : « Le lien entre les droites propres du transposé de u et les sous espaces stables de u n'est pas connu ».

Références

[Gou] X. Gourdon : *Les maths en tête - Algèbre*. Ellipses (1994).

[Sid] J-C. Sidler : *Géométrie projective*. Dunod (2000).