Université de Rennes I
Préparation à l'agrégation (leçons d'analyse)

(Notes rédigées par J.-P. Conze)

Sur la leçon : Comportement d'une suite définie par itération : $u_{n+1} = f(u_n)$, exemples

Ce document propose quelques thèmes pour la leçon "Comportement d'une suite définie par itération, exemples" et éventuellement pour d'autres leçons. Bien entendu, ceci n'est pas un plan de leçon.

Motivation de l'étude

Soit $T : X \to X$ une application d'un espace métrique (X, d) dans lui-même.

Pour tout point initial $x_0 = x$, on considère la suite $(T^n x)_{n \geq 0} = (x_n)_{n \geq 0}$ des itérées définies par la relation de récurrence :

$$x_{n+1} = Tx_n, n \geq 0.$$

De nombreux domaines font appel à l'étude d'itérations. Citons notament :
– la résolution d'équations (cf. 1.3),
– la discrétisation d'équations différentielles (cf. 2.3) et en relation avec cette méthode, l'étude de modèles en physique, biologie,
– la représentation des réels (cf. section 3).

L'étude du comportement asymptotique de la suite $(x_n)_{n \geq 0}$ conduit à poser les questions suivantes :
– convergence vers une limite ?
– comportement asymptotiquement périodique ?
– existence d'un "attracteur" ?
– existence d'une distribution limite pour la suite (x_n) ?

Table des matières

1 Premiers exemples

Le cas le plus simple est celui où, pour toute valeur initiale x, la suite $(x_n)_{n\geq 0}$ converge vers une limite ℓ. Si l'application T est continue, on a alors $T\ell = \ell$: la limite est un point fixe pour l'application T.

L'étude permet dans certains cas de montrer la convergence vers un point fixe. Cette convergence et sa vitesse sont des renseignements importants puisqu'ils permettent de mettre en oeuvre des algorithmes de résolution d'équations.

1.1 Cas des applications monotones

Considérons le cas où X est $\mathbb{R}$ ou un intervalle.

Soit T une application d'un intervalle I dans lui-même. L'étude de l'itération est basée sur les observations suivantes :
Si T est croissante, alors (x_n) est monotone (croissante ou décroissante suivant que $x_1 > x_0$ ou $x_1 < x_0$).
Si T est décroissante, $T \circ T$ est croissante et les sous-suites (x_{2n}) (x_{2n+1}) sont monotones, de sens opposés.

faire des dessins

Dans la situation qui est ici celle de la dimension 1, on discutera la notion de point fixe attractif, super-attractif ($T'(a) = 0$), point répulsif.

Quelques exemples simples : itération de
$x \to \frac{1}{2}x + \frac{1}{x}$ (algorithme de calcul de $\sqrt{2}$;
$x \to \sin x$ (convergence lente vers 0) ;
$x \to sh\ x$ (point répulsif)

1.2 Cas des applications contractantes

Revenons au cas général d'un espace X métrique. On suppose que T est **contractante** dans le sens suivant :

$$\text{il existe } \lambda \in]0,1[\text{ tel que } d(Tx,Ty) \leq \lambda\ d(x,y), \forall x,y \in X. \tag{1}$$

Pour tout x, la suite $(T^n x)_{n \geq 0}$ est alors de Cauchy, d'après la majoration :

$$\begin{aligned} d(T^n x, T^{n+r} x) &\leq \sum_{k=0}^{r-1} d(T^{n+k}x, T^{n+k+1}x) \\ &\leq \lambda^n (1 + \lambda + ... + \lambda^{r-1})\, d(x,Tx) \leq \frac{\lambda^n}{1-\lambda} d(x,Tx). \end{aligned}$$

Si l'espace (X,d) est complet, la suite converge vers le point fixe (nécessairement unique) de T.

Dans le cas où l'espace X est *compact*, on peut affaiblir la condition (1) en :

$$d(Tx,Ty) < d(x,y), \forall x \neq y. \tag{2}$$

Par contre, si l'espace n'est pas compact, la condition n'est plus suffisante, comme le montre l'exemple suivant sur $\mathbb{R}^+$: $Tx = \sqrt{x^2+1}$. [On a ici $T^n x = \sqrt{x^2+n}, \forall n \geq 1$, et $(T^n x)$ tend vers $+\infty$.]

Remarque : L'application T peut ne pas être contractante, mais avoir une puisance contractante.

Exemple : Si M est une matrice $d \times d$ à coefficients réels opérant sur $\mathbb{R}^d$ muni de la norme euclidienne, M^r est contractante au sens de (1) pour une puissance $r \geq 1$, si et seulement si $\rho(M) < 1$, où $\rho(M) = \lim_n \|M^n\|^{1/n}$ est le rayon spectral de M.

1.3 Itération et résolution d'équations, méthode de Newton

Si l'on cherche à résoudre l'équation

$$Ty = y, \tag{3}$$

dans la situation précédente, la convergence de la suite des itérées $(T^n x)$ vers un point fixe de T fournit un moyen de calcul approché d'une solution de l'équation (3). Le procédé est efficace si la convergence est rapide.

Méthode de Newton

La méthode de Newton est une application du procédé ramenant la résolution approchée d'une équation à une itération.

Etant donnée une fonction f de classe C^1 définie sur $\mathbb{R}$ ou sur un intervalle, on cherche à résoudre l'équation

$$f(y) = 0. \tag{4}$$

Introduisons la fonction $F : x \to F(x) = x - \dfrac{f(x)}{f'(x)}$.

Tout point fixe de F est une solution de (4). La fonction F a pour dérivée $F' = \frac{ff''}{f'^2}$. Si a est une solution de (4), on a $F'(a) = 0$ et F est contractante au voisinage de a (théorème des accroissements finis). Il existe donc $\alpha > 0$ tel que, pour toute valeur initiale $x_0 \in [a-\alpha, a+\alpha]$, la suite des itérées définie par $x_{n+1} = F(x_n), n \geq 0$, converge vers a. Plus précisément, on a le résultat suivant :

Théorème : *Soit f de classe C^2 sur un intervalle $I = [a-r, a+r]$ sur lequel f' ne s'annule pas et telle que $f(a) = 0$. Il existe $h > 0$ et M tels que l'intervalle $[a-h, a+h]$ soit invariant par F et tel que $|F(x) - a| \leq M|x-a|^2, \forall x \in [a-h, a+h]$.*

Il en résulte par récurrence :

$$|x_n - a| \leq M^{-1}(M|x_0 - a|)^{2^n}, \forall n \in \mathbb{N}, \forall x_0 \in [a-h, a+h].$$

Nous ne développons pas plus longuement ici les exemples d'applications contractantes : les nombreux et très importants exemples (théorème de Cauchy-Lipschitz, théorème des fonctions implicites, ...) doivent être mentionnés, mais trouvent plutôt leur place dans la leçon "Théorème du point fixe".

2 Des exemples plus compliqués

2.1 Généralités, définitions

Orbite d'un point x : on appelle orbite d'un point x sous l'action de T l'ensemble $\{T^n x, n \geq 0\}$.

On dit que x est *périodique* ou d'orbite périodique, s'il existe $n > 0$ tel que $T^n x = x$. Le plus petit entier $n > 0$ vérifiant cette relation est la *période* de x (c'est la longueur de son orbite).

Notion d'attracteur

En général le comportement d'une itération est très compliqué. Dans le cas simple d'une application contractante, le point fixe peut être vu comme un attracteur. Un cas un peu plus général est celui où la transformation T possède une orbite périodique, qui est un attracteur : les itérés d'un point se rapprochent de l'orbite périodique et, asymptotiquement, "tournent" sur cette orbite. Un attracteur peut être un ensemble plus compliqué qu'une orbite périodique.

Les expériences physiques et la simulation sur ordinateur de systèmes dynamiques font apparaître souvent un comportement *transient*, suivi de ce qui paraît être un régime asymptotique plus permanent dans lequel les itérés sont proches d'un ensemble "attracteur".

Un ensemble fermé invariant K est appelé *attracteur* s'il existe un voisinage ouvert U de K tel que $d(T^n x, K) \to 0$, pour tout $x \in U$.

L'ensemble ouvert $\cup_{n>0} T^{-n} U$ (qui est le plus grand ouvert vérifiant la condition précédente) est appelé *bassin d'attraction* de K.

2.2 Exemples

1) Le cas où X est **fini**

Pour dégager une intuition sur le comportement asymptotique d'un système dynamique, il peut être utile d'examiner d'abord un modèle très simple, celui où l'espace est fini.

Soit T une application d'un ensemble X *fini* dans lui-même. La suite $(T^n X)_{n \geq 0}$ est décroissante. Considérons l'intersection $F = \bigcap_n T^n X$. Comme X est fini, il existe un entier N tel que $F = \bigcap_{n=1}^{n=N} T^n X$. L'application T est une bijection de F sur lui-même et cet ensemble se décompose en "cycles invariants" pour T (permutation des éléments de F).

On voit ainsi que, pour tout $x \in X$, il existe des entiers $m(x) \geq 0$ et $n(x) \geq 1$ tels que $x' = T^{m(x)}x \in F$, et $T^{n(x)}x' = x'$.

Le comportement asymptotique des itérées de T peut être décrit ainsi :
– comportement *transient* (les itérées "finissent" par appartenir à F, qui joue le rôle d'un attracteur),
– comportement *récurrent* : les points de F décrivent des cycles sous l'action de T.

Pour un point de départ $x \in X$, à partir du rang $m(x)$, le transformé de x appartient à l'attracteur et "tourne" sur l'attracteur avec période $n(x)$.

Dans le cas général d'un espace métrique X, si K est un attracteur, les points du bassin d'attraction de K s'approchent de K, mais bien sûr ne "finissent" pas par appartenir à K en général, sauf si le point initial est pris dans K.

Exemple 1 : Dans la méthode de Newton, chaque racine (simple) possède un voisinage qui est un bassin d'attraction.

Exemple 2 : Moyenne arithmético-géométrique

Il s'agit de l'itération de l'application de $\mathbb{R}_+^2$ dans lui-même définie par

$$(x, y) \to F(x, y) = (\frac{x+y}{2}, \sqrt{xy}).$$

La diagonale forme l'ensemble des points fixes de F.

Etant donné un point de départ (x, y), on forme la suite dans le quadrant définie par $(x_{n+1}, y_{n+1}) = (\frac{1}{2}(x_n + y_n), \sqrt{x_n y_n})$, $n \geq 0$, $(x_0, y_0) = (x, y)$.

On montre facilement que les suites (x_n) et (y_n) sont adjacentes. Elles convergent avec une vitesse exponentielle vers leur limite commune, point de la diagonale qui est la moyenne arithmético-géométrique du couple (x, y).

La diagonale est un attracteur pour l'ensemble des points du quadrant.

cf. aussi [1]

Exemple 3 : $x \to 1 - x^2$

Cet exemple simple fait apparaître une orbite périodique attractive $\{0, 1\}$ et un point fixe instable $\alpha = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$.

Notons $f(x) = 1 - x^2$, $g(x) = f \circ f(x) = 2x^2 - x^4$. L'aplication g a trois points fixes sur $[0, 1]$: $0, 1, \alpha$.

Pour $x \in]0, \alpha[$, on a $g(x) < x$. La suite $(g^n(x))$ des itérés de x par g est décroissante, donc a pour limite le point fixe 0. De même, pour $x \in]\alpha, 1[$, on a $g(x) > x$ et la suite $(g^n(x))$ converge en croissant vers 1. Ceci établi le résultat.

Nous allons maintenant donner d'autres types d'exemples aux propriétés très différentes :
- les rotations irrationnelles sur le cercle $x \to x+\alpha \mod 1$ qui sont sans points périodiques et pour lesquelle tous les points sont d'orbite dense ;
- la transformation $x \to 2x \mod 1$ (ou son modèle "symbolique" le décalage sur un espace produit) pour laquelle les points périodiques sont denses.

Exemple 4 : Rotation d'angle α

On considère le cercle unité $\mathbb{T}$ identifié à $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$. On note T_α la rotation d'angle α sur le cercle unité définie sur le "modèle" $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ par :

$$T_\alpha : x \to x + \alpha \mod 1.$$

Cette transformation laisse la mesure de Lebesgue λ invariante et elle est inversible. C'est de plus une isométrie de l'espace.

Nous verrons (cf. 4.2) que si α est irrationnel, tout point est d'orbite dense.

Exemple 5 : Multiplication par 2 mod 1

On désigne par T la transformation $x \to 2x \mod 1$, opérant sur $\mathbb{T}$.

Cette transformation laisse la mesure de Lebesgue λ invariante. Elle peut être vue aussi géométriquement comme le "doublement de l'angle", ou analytiquement comme la transformation $z \to z^2$ restreinte au cercle unité.

(Noter que $z \to z^2$ défini une transformation de $\mathbb{C}$ dans lui-même. On peut décrire le comportement des itérées $T^n z$ suivant le point de départ z : si $|z| > 1$, la suite des itérées tend en module vers $+\infty$; si $|z| < 1$, la suite tend vers 0. Pour $|z| = 1$, il s'agit de la transformation doublement de l'angle. Si on rajoute à $\mathbb{C}$ un point à l'infini, on a ainsi deux bassins d'attraction séparés par l'ensemble invariant $\{z : |z| = 1\}$.)

Orbites périodiques :

L'orbite sous l'action de T d'un point rationnel $x = \frac{p}{q}$, p et q premiers entre eux, est finie modulo 1 : ce sont des fractions (non nécessairement irréductibles) de même dénominateur, dans $[0, 1]$. Il existe donc des entiers r et ℓ tels que $2^{r+\ell}x - 2^\ell x \in \mathbb{Z}$.

Si q est *impair*, ceci implique que $2^r x = x \mod 1$, ce qui montre, en particulier, que toute fraction irréductible à dénominateur impair peut s'écrire sous la forme (en général non irréductible) $\frac{p}{q} = \frac{p'}{2^n-1}$, pour des entiers p', n.

Dans le cas général, si $q = 2^t q_0$, avec q_0 impair, l'itération de la transformation T appliquée au point initial $x = \frac{p}{q}$ donne :

$$\begin{aligned} \tfrac{p}{q} = \tfrac{p}{2^t q_0} &\to \tfrac{p}{2^{t-1} q_0} \bmod 1 \to \ldots \to \tfrac{p}{q_0} \bmod 1 \\ &\to \tfrac{2p}{q_0} \bmod 1 \to \ldots \to \tfrac{2^r p}{q_0} = \tfrac{p}{q_0} \bmod 1. \end{aligned}$$

On a ainsi montré que, pour tout rationnel x, son orbite $(T^n x)$ est périodique à partir d'un certain rang.

Exemple 6 : Décalage

Nous considérons maintenant un système "symbolique" défini sur l'espace $\Omega^+ = I^{\mathbb{N}}$, l'espace produit (unilatère) d'une famille de $\mathbb{N}$ copies d'un alphabet I fini. Un point ω de Ω^+ est donc une suite $\omega = (\omega_0, \omega_1, \ldots)$ à valeurs dans l'alphabet I.

On note θ la transformation définie par *décalage* sur les coordonnées, $\theta(\omega)_n = \omega_{n+1}$, $n \geq 0$, soit :

$$\theta(\omega_0, \omega_1, \ldots) = (\omega_1, \omega_2, \ldots).$$

L'espace Ω^+ est muni de la topologie produit, qui peut être définie à l'aide de la distance $d(\omega, \omega') = \sum_{n=0}^{\infty} 2^{-n} \delta(\omega_n, \omega'_n)$, δ désignant le symbole de Kronecker. Nous notons $\mathcal{E}$ la tribu borélienne sur Ω^+.

Pour tout vecteur de probabilité $p = (p_1, \ldots, p_{|I|})$ sur I, on définit une mesure de probabilité produit $\mathbb{P}$ sur Ω^+ ("mesure de Bernoulli"), en posant

$$\mathbb{P}(X_0 = a_0, \ldots, X_n = a_n) = p_{a_0} \ldots p_{a_n},$$

et en prolongeant $\mathbb{P}$ à la tribu borélienne de Ω^+. La mesure $\mathbb{P}$ est invariante par l'action du décalage θ.

Exercices :
1) Montrer que les points périodiques sous l'action de θ sont denses dans Ω^+.

2) Montrer que, pour $\mathbb{P}$-presque tout point ω (où $\mathbb{P}$ est une mesure produit), l'orbite de ω (sous l'action de θ) est dense dans Ω^+. (Utiliser de la loi des grands nombres - la preuve peut servir de développement dans la leçon "Utilisation de la dénombrabilité en analyse").

3) A l'aide du 2) montrer que, pour λ-presque tout $x \in [0, 1]$ (où λ est la mesure de Lebesgue), l'orbite de x sous l'action de la transformation $x \to 2x \bmod 1$ est dense dans $[0, 1]$.

2.3 Un exemple simple de discrétisation d'équations différentielles

Considérons une équation différentielle "autonome", sur un intervalle de $\mathbb{R}$

$$x' = f(x). \tag{5}$$

La méthode d'Euler de calcul approché de la solution de (5) par discrétisation revient à construire la suite des itérées

$$x_{n+1} = x_n + hf(x_n),$$

pour une constante $h > 0$ petite, à partir d'une valeur initiale $x_0 = x(0)$.

Pour illustrer les difficultés qui peuvent apparaître dans une méthode de discrétisation, nous allons considérer l'exemple simple de l'équation différentielle :

$$x' = ax(1-x), \tag{6}$$

où a est une constante.

Cette équation est un modèle simple de l'évolution dans le temps de la densité d'une population qui croît presque exponentiellement pour une faible valeur de sa densité (abondance des ressources) et arrive à saturation (limitation des ressources naturelles) pour une valeur normalisée à 1.

L'équation différentielle peut être résolue explicitement. Pour une valeur initiale $x(0) = x_0 \in]0,1[$, on obtient la solution

$$x(t) = \frac{1}{1 + \frac{1-x_0}{x_0} e^{-at}}.$$

La solution est définie sur tout $\mathbb{R}$ et croît de 0 à 1, quand t croît de $-\infty$ à $+\infty$.

Pour obtenir le modèle discrétisé, on choisit un "pas" de discrétisation $h > 0$ petit et on itère, à partir de x_0 l'application $x \to x + hf(x)$, avec $f(x) = ax(1-x)$. Posons $b = ah$. On obtient la suite définie par la relation de récurrence

$$x_{n+1} = bx_n(\frac{1+b}{b} - x_n);$$

soit encore, en posant $y = \frac{b}{1+b}x$.

$$y_{n+1} = (1+b)y_n(1-y_n).$$

On est ainsi amené à étudier l'exemple qui suit.

Exemple 7 : Transformation quadratique (Réf [2])

$$x \to T_\lambda(x) = \lambda x(1-x), 0 < \lambda \leq 4$$

Cette transformation est aussi appelé application "logistique". Elle a été étudiée notamment pas Feigenbaum.

Pour $0 < \lambda \leq 4$, l'application envoie l'intervalle $[0,1]$ sur $[0, \lambda/4] \subset [0,1]$. Elle a deux points fixes, 0 et $\alpha = 1 - \frac{1}{\lambda}$.

Pour $(0 < \lambda < 3)$, le point fixe α est stable. Pour tout $x \in]0,1[$, la suite des itérées $(T^n x)$ converge vers α. En effet pour $x \in]0, \alpha[$, cette suite est d'abord croissante, puis à partir du rang n_1 tel que $\frac{1}{\lambda} < x_n < \alpha < x_{n+1} = Tx_n$, les éléments de la suite appartiennent à l'intervalle de centre α sur lequel T est strictement contractante. Si $x \in]\alpha, 1[$, on $x_1 = Tx \in]0, \alpha[$ et on est ramené au cas précédent.

En augmentant la valeur du paramètre λ, au-delà de $\lambda = 3$, on passe d'un régime du type "point fixe attracteur" $(0 \leq \lambda < 3)$, à celui à celui d'orbites périodiques attractives. En augmentant encore λ, on obtient le doublement successif des périodes jusqu'à une valeur critique λ_0 à partir de laquelle on a affaire à un ensemble de Cantor attracteur. Cette valeur critique est de l'ordre de 3,57.

Quand on atteint la valeur maximum du paramètre $\lambda = 4$, on obtient une transformation ayant une mesure invariante avec densité. La transformation est alors conjuguée à la transformation "tente" définie par $\theta(x) = 2x$, pour $0 \leq x \leq \frac{1}{2}$, $\theta(x) = 2(1-x)$, pour $\frac{1}{2} < x \leq 1$.

Revenons à la discrétisation de (6). Pour une valeur (grande) du paramètre $a > 200$ et pour un pas $h = 0.01$, on observe dans la méthode de discrétisation des oscillations qui correspondent à l'apparition d'orbites périodiques, puisque la méthode revient à itérer l'application $y \to (1+b)y(1-y)$ avec $b = ah > 3$.

Etude de T_4 (cas $\lambda = 4$)

Reprenons l'application $S : x \to 2x \bmod 1$. Soit ψ l'application de $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ sur $[0,1]$ définie par $\psi : x \to \sin^2 \pi x$. La relation $\sin^2(2\pi x) = 4\sin^2 \pi x\ (1 - \sin^2 \pi x)$ montre que le diagramme suivant est commutatif :

$$\begin{tikzcd}
x \arrow[r, "S"] \arrow[d, "\psi"'] & 2x \bmod 1 \arrow[d, "\psi"'] \\
\sin^2(\pi x) \arrow[r, "T_4"] & \sin^2(2\pi x)
\end{tikzcd}$$

La transformation T_4 est un "facteur" de $x \to 2x \bmod 1$ (par identification de x et de $1-x$). Elle est elle-même conjuguée de la transformation "tente", définie par $x \to 2x,\ 0 \leq x \leq \frac{1}{2},\ 2(1-x),\ \frac{1}{2} < x \leq 1$.

Sous la forme transformation "tente", ou comme facteur de $x \to 2x \bmod 1$, il est immédiat que les points périodiques de T_4 sont denses.

On obtient une mesure invariante (cf. compléments 4.1) par T_4 ayant une densité par rapport à la mesure de Lebesgue, en prenant l'image par $x \to \sin^2 \pi x$ de la mesure de Lebesgue (qui est invariante par $x \to 2x \bmod 1$). On obtient la mesure de densité $\dfrac{1}{\pi}\dfrac{1}{\sqrt{x(1-x)}}$.

3 Représentations des réels associées à une itération

3.1 Représentation et itération, développement en base b

Notations : On note $[y]$ la partie entière d'un réel y, $\{\frac{1}{y}\} = y - [y]$ sa partie fractionnaire.

Les systèmes de numération (développement en base b, développement en fraction continue) sont basés sur le principe suivant :

Soient T une transformation d'un espace X dans lui-même et $x \to a(x)$ une fonction sur X à valeurs dans $\mathbb{N}$.

A tout point x, on peut associer la suite $\phi(x) = (a(T^n x))_{n \geq 0}$. On obtient ainsi une application $x \to \phi(x)$ de X dans l'espace $\Omega = \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$, telle que $\phi \circ T = \theta \circ \phi$. Cette application est injective si la donnée de la suite $(a(T^n x))_{n \geq 0}$ détermine x. Elle fournit un **codage** des points de X et "conjugue" la transformation T au décalage θ restreint à un sous-ensemble θ-invariant de Ω.

Si nous prenons pour X l'intervalle $[0,1]$ et pour transformation T la transformation $x \to bx \bmod 1$, nous obtenons la représentation en base b (dans ce cas la fonction a est $a(x) = [bx]$).

Un autre procédé de représentation, que nous allons maintenant examiner, est le développement en fraction continue. Ce procédé est lié aux propriétés d'approximation des réels par les rationnels.

3.2 Fraction continue associée à une suite d'entiers

Soit $(a_n)_{n\geq 1}$ une suite d'entiers ≥ 1. Définissons deux suites d'entiers (p_n) et (q_n), $n \geq -1$, avec les valeurs initiales $p_{-1} = 1$, $p_0 = 0$, $q_{-1} = 0$, $q_0 = 1$, par les relations de récurrence suivantes, pour $n \geq 0$:

$$p_{n+1} = a_{n+1}p_n + p_{n-1}, \tag{7}$$
$$q_{n+1} = a_{n+1}q_n + q_{n-1}. \tag{8}$$

On obtient par récurrence les relations

$$p_{n-1}q_n - p_nq_{n-1} = (-1)^n, \ \forall n \geq 0, \tag{9}$$

qui impliquent que les fractions $\frac{p_n}{q_n}$ sont irréductibles.

Pour tout $n \geq 1$, considérons les fractions rationnelles

$$\cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \ddots + \cfrac{1}{a_n + y}}} = \frac{p_n + p_{n-1}y}{q_n + q_{n-1}y}. \tag{10}$$

Dans la relation précédente, les suites (p_n) et (q_n) sont définies par (8) et l'égalité entre les membres de gauche et de droite s'obtient aisément par récurence.

Les relations (8) vérifiées par les suites (p_n) et (q_n) montrent que ces suites croissent au moins aussi vite que la suite de Fibonacci (cas où tous les a_n sont égaux à 1), donc avec une vitesse au moins exponentielle. D'autre part, d'après (9), on a :

$$\frac{p_n}{q_n} - \frac{p_{n-1}}{q_{n-1}} = \frac{(-1)^{n-1}}{q_nq_{n-1}}, \tag{11}$$

ce qui montre que la suite $(\frac{p_n}{q_n})$ vérifie la condition de Cauchy. Notons x sa limite :

$$x = \lim_n \frac{p_n}{q_n} = \lim_n \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \ddots + \cfrac{1}{a_n + \ddots}}}.$$

On a ainsi associé à toute suite $(a_k)_{k\geq 1}$ d'entiers ≥ 1, un point de l'intervalle $]0, 1[$. La suite $(0; a_1, a_2, \cdots)$ forme le développement en fraction continue de x. Ce qui suit montre qu'il y a unicité de la représentation.

3.3 Itération et fraction continue

Nous allons montrer comment on peut obtenir le développement en fraction continue des points de l'intervalle $]0,1[$ à l'aide du formalisme présenté en 3.1.

On prend pour X l'intervalle $[0,1]$ privé des rationnels. Notons T la transformation de $]0,1[$ dans $]0,1[$ (transformation de Gauss) définie par

$$T : x \to \{\frac{1}{x}\},$$

a la fonction $a(x) = [\frac{1}{x}]$.

Pour $x \in]0,1[$, on a donc :

$$x = \frac{1}{a(x) + Tx}. \tag{12}$$

En itérant la relation (12), on obtient :

$$x = \cfrac{1}{a_1(x) + \cfrac{1}{a_2(x) + \ddots + \cfrac{1}{a_n(x) + T^n x}}}, \ \forall n \geq 1,$$

où $(a_n(x))_{n \geq 1}$ est la suite d'entiers ≥ 1 définie par

$$a_n(x) = a(T^{n-1}x).$$

En appliquant (10), cette fraction s'écrit :

$$x = \frac{p_n + p_{n-1}T^n x}{q_n + q_{n-1}T^n x}, \tag{13}$$

où les suites d'entiers (p_n) et (q_n) (qui dépendent de x) sont définies à partir de la suite $(a_n(x))$ par les relations (8).

On peut étendre la construction aux x rationnels, mais cette construction, qui correspond à l'algorithme du PGCD, s'arrête à la valeur de n pour laquelle $T^n x = 0$. Par contre, si x est irrationnel, la construction se poursuit indéfiniment et on peut ainsi écrire tout x irrationnel de $[0,1]$ sous la forme de son "développement" en fraction continue :

$$x = \lim_n \frac{p_n(x)}{q_n(x)} = \cfrac{1}{a_1(x) + \cfrac{1}{a_2(x) + \ddots + \cfrac{1}{a_n(x) + \ddots}}}.$$

On obtient, par les relations (9) :

$$q_n x - p_n = \frac{(-1)^n}{q_{n+1} + q_n T^{n+1} x}, \tag{14}$$

ce qui fournit l'encadrement :

$$\frac{1}{q_{n+1} + q_n} \leq |q_n x - p_n| \leq \frac{1}{q_{n+1}}.$$

En particulier, on a :

$$|x - \frac{p_n}{q_n}| \leq \frac{1}{q_n\ q_{n+1}} < \frac{1}{a_{n+1}\ q_n^2}. \tag{15}$$

Cette inégalité permet de relier la vitesse de convergence de la suite $(\frac{p_n}{q_n})_{n\in\mathbb{N}}$ vers x, à la suite $(a_n(x))$, et donc de décrire les propriétés "diophantiennes" de x (vitesse d'approximation par les rationnels).

Parmi les développements en fraction continue, les plus remarquables sont les développements périodiques. Ce sont les orbites périodiques de la transformation T. Plus généralement, on considère les points dont le développement est périodique à partir d'un certain rang (orbite "*ultimement périodique*").

En particulier, le point x tel que $a_k(x) = 1, \forall k \geq 1$, est le point fixe de la transformation T :

$$x = \frac{1}{1 + \frac{1}{1+\ddots + \frac{1}{1+\ddots}}}.$$

Il s'agit du nombre quadratique solution positive de l'équation du second degré : $x = \frac{1}{1+x}$, soit $x^2 + x - 1$. On obtient $x = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$ (cf. le nombre d'or).

De façon générale, on montre facilement que tout réel $x \in]0,1[$ de développement en fraction continue périodique, ou plus généralement ultimement périodique, est un nombre quadratique (solution d'une équation du second degré à coefficients entiers).

Réciproquement, on a (théorème de Lagrange) :

Théorème : (Réf. [3]) *Si x a un développement ultimement périodique, x est un nombre quadratique.*

Preuve : Soit x un nombre quadratique, que l'on peut supposer dans $[0,1]$. Il existe des entiers α, β, γ tels que

$$\alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0 \tag{16}$$

En remplaçant x par l'expression (3.3.3), on obtient que $T^n x$ est solution d'une équation du second degré à coefficients entiers de la forme :

$$A_n (T^n x)^2 + B_n T^n x + C_n,$$

avec $C_n = \alpha p_n^2 + \beta p_n q_n + \gamma q_n^2$ et $A_n = C_{n-1}$.

En posant $x = \frac{p_n}{q_n} + \delta_n$ et en substituant dans l'équation (16), on obtient :

$$C_n = \alpha p_n^2 + \beta p_n q_n + \gamma q_n^2 = -[(2\alpha p_n q_n + \beta q_n^2)\delta_n + \alpha q_n^2 \delta_n^2].$$

L'inégalité (15) montre que le second membre de l'expression précédente reste borné indépendamment de n, ce qui implique que C_n et A_n ont la même propriété.

Par ailleurs, un calcul élémentaire montre que, si y vérifie $x = \frac{1}{a+y}$ avec x solution de (16), alors y est solution d'une équation du second degré avec le *même* discriminant $\beta^2 - 4\alpha\gamma$. Cette remarque implique, compte-tenu de (13), que

$$B_n^2 - 4A_nC_n = \beta^2 - 4\alpha\gamma.$$

On a ainsi montré que les équations du second degré à coefficients entiers vérifiées par $T^n x$, quand n varie, appartiennent à une famille *finie* d'équations. Il existe donc deux entiers $n_1 < n_2$ tels que $T^{n_1}x = T^{n_2}x$.

Ceci prouve que la suite $(T^n x)$ et donc le développement en fraction continue de x sont périodiques à partir du rang n_1.

□

4 Compléments

4.1 Mesures invariantes

Devant la complexité des orbites de l'itération d'une transforamtion, que faire ? Une notion importante fournit un outil et l'espoir d'y voir plus clair dans cette étude : celle de mesure invariante. La notion-clef de mesure invariante est liée à une démarche de nature statistique. Précisons les définitions :

Une mesure de probabilité sur X espace compact est une forme linéaire positive sur l'espace des fonctions continues, telle que $\mu(1) = 1$. On utilise la notation $\mu(f)$ ou la notation intégrale $\int f(x)\ d\mu(x)$.

On peut, comme dans la construction de l'intégrale de Lebesgue, étendre la mesure aux fonctions boréliennes ; en particulier, on peut définir la mesure (au sens de μ) d'un ensemble borélien.

Une mesure de probabilité μ sur X est **invariante** par T si

$$\int_E f(Tx)\ d\mu(x) = \int_E f(x)\ d\mu(x), \forall f \text{ continue sur } E.$$

On écrit alors $T\mu = \mu$. On montre qu'il existe toujours une mesure invariante : Si T est une transformation continue d'un compact X dans lui-même, il existe une mesure μ telle que $T\mu = \mu$ (*théorème de Markov-Kakutani*).

On notera aussi que très souvent, pour les systèmes étudiés, il existe une mesure invariante "naturelle" (par exemple la mesure uniforme sur le cercle pour une rotation, ou cette même mesure uniforme pour la transformation $x \to 2x \bmod 1$, ou encore la mesure de densité $\frac{1}{Ln2}\frac{1}{1+x}$ pour la transformation de Gauss $T : x \to \{\frac{1}{x}\}$.

Si μ est une mesure de probabilité invariante, on peut montrer, sous certaines hypothèses (ergodicité) que, pour μ-presque tout x, la suite $(T^n x)$ possède une distribution asymptotique égale à μ. Nous donnons dans la suite l'exemple élémentaire des rotations irrationnelles.

4.2 Etude des rotations, équirépartition de $(T_\alpha^n x)$

Soit T_α la rotation d'angle α sur le cercle unité. Notons que le cercle unité peut être vu géométriquement dans le plan, mais aussi de façon isomorphe comme le groupe abélien compact $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$. Nous faisons opérer la transformation T_α sur $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ par $x \to x + \alpha \bmod 1$ (ce qui correspond à la rotation d'angle $2\pi\alpha$ sur le cercle unité dans le plan). Si α est un nombre rationnel, $\alpha = p/q$, avec p et q premiers entre eux, alors toutes les orbites sont périodiques de période q.

Dans toute la suite, on suppose que α est un nombre **irrationnel**.

Théorème : *Si f est une fonction continue, périodique, de période 1, on a :*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f(t + k\alpha) = \int_0^1 f(s)\, ds, \ \forall t \in \mathbb{R}. \tag{17}$$

Preuve : 1) Supposons d'abord que f soit un polynôme trigonométrique (de période 1), $f(x) = \sum_{k=-\ell}^{\ell} c_k e^{2\pi i k x}$. Le coefficient c_0 du développement de f est égal à $\int_0^1 f(x)\, dx$. Nous avons :

$$\begin{aligned} \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} f(n\alpha) &= \frac{1}{N}\sum_{k=-\ell}^{\ell} c_k (\sum_{n=0}^{N-1} e^{2\pi i k n\alpha}) \\ &= c_0 + \frac{1}{N}\sum_{k=-\ell, k\neq 0}^{\ell} c_k\, \frac{1 - e^{2\pi i k N\alpha}}{1 - e^{2\pi i k\alpha}}, \end{aligned}$$

d'où, en utilisant le fait que α est irrationnel et donc que $e^{2\pi ik\alpha} \neq 1$ pour tout $k \in \mathbb{Z} - \{0\}$:

$$|\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} f(n\alpha) - c_0| \leq \frac{2C}{N}$$

avec $C = \sum_{k=-\ell,k\neq 0}^{\ell} \frac{|c_k|}{|1-e^{2\pi ik\alpha}|}$.

2) Soit maintenant f une fonction continue de période 1. On sait que, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un polynôme trigonométrique P, de période 1, tel que $\|f - P\|_\infty < \varepsilon$. On a :

$$\begin{aligned}
|\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} f(n\alpha) - \int_0^1 f(x)\ dx| &\leq \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} |f(n\alpha) - P(n\alpha)| + |\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} P(n\alpha) \\
&- \int_0^1 P(x)\ dx| + \int_0^1 |P(x) - f(x)|\ dx \\
&\leq \varepsilon + |\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} P(n\alpha) - \int_0^1 P(x)\ dx| + \varepsilon.
\end{aligned}$$

D'après la première partie du raisonnement, il existe N_0 tel que, pour $N \geq N_0$, on ait :

$$|\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} P(n\alpha) - \int_0^1 P(x)\ dx| < \varepsilon;$$

d'où, pour $N \geq N_0$,

$$|\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} f(n\alpha) - \int_0^1 f(x)\ dx| < 3\varepsilon.$$

□

Corollaire 1 : *Si α est irrationnel, la mesure uniforme sur $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ est l'unique mesure de probabilité invariante par la transformation T_α.*

Théorème : *Soit f une fonction périodique, de période 1, telle que, pour tout ε, il existe deux fonctions g_1 et g_2 continues périodiques, de période 1, vérifiant :*

$$g_1 \leq f \leq g_2,\ \ et\ \int_0^1 (g_2 - g_1)\ dt < \varepsilon. \tag{18}$$

Alors f vérifie (17).

Soit $I = [a, b]$ un intervalle contenu dans $[0, 1]$. La fonction ϕ_I périodique, de période 1, coïncidant avec la fonction indicatrice de I sur $[0, 1]$ vérifie la propriété (18))

On en déduit qu'on a, pour tout $x \in \mathbb{R}$: $\lim_n \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} \phi_I(x + k\alpha) = b - a$, ce qui implique :

Corollaire 2 : *Pour tout x, l'orbite de x sous l'action de T_α est dense.*

Application : (répartition de la première décimale de l'écriture de 2^n en base 10)

On considère la suite $(2^n, n \in \mathbb{N})$ et on pose, pour $j = 1, ..., 9$:

$$\theta_j(n) = 1, \text{ si } 10^\ell j \leq 2^n < 10^\ell (j+1), \text{ avec } \ell \text{ entier}, \ = 0, \text{ sinon.}$$

(Autrement dit la somme $\sum_0^{n-1} \theta_j(k)$ compte combien de fois l'écriture de 2^k en base 10 commence par j, pour $k = 0, ..., n-1$.)

On établit d'abord que $\alpha = \log_{10} 2$ est irrationnel.

En appliquant le théorème précédent à l'itération de $x \to x + \log_{10} 2 \bmod 1$ et à la fonction indicatrice de l'intervalle $[\log_{10} j, \log_{10}(j+1)[$, on obtient, pour $j = 1, ...9$:

$$\lim_n \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \theta_j(k) = \log_{10}(1 + \frac{1}{j}).$$

Exercice : Montrer qu'il existe un entier n tel que la représentation de 2^n en base 10 commence par 123456789.

* * *

Développements possibles :

Parmi les développement possibles, on pourra donner :

– Une forme (partielle) du *Théorème de Sarkovski* :

Théorème : *Si une application f, continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, possède une orbite de période 3, elle possède des orbites de tous ordres.* (Réf. [1, 2])

– Le théorème de Lagrange (Réf [3], avec des notations un peu différentes).

– Le développement présenté en annexe 1 (tout est élémentaire) qui peut également servir d'illustration à la leçon portant sur l'analyse de Fourier.

– Les résultats énoncés en exercices dans 2.2, exemple 6.

Références :

[1] Chambert-Loir, Fermigier : *Exercices pour l'agrégation, Analyse 1.*

[2] Devaney : *Introduction to Chaotic Dynamical Systems, 1986.*

[3] A. Ya. Khintchine : *Continuous fractions.*