Université de Rennes 1
Préparation à l'agrégation
de mathématiques
Auteur du document :

J-C.Raoult, M. Coste

Jacobien des polynômes symétriques élémentaires

J-C. Raoult

Un petit exercice de calcul de déterminant lié aux fonctions symétriques élémentaires des racines d'un polynôme. Il peut donc figurer comme exemple dans les leçons d'algèbre sur les déterminants et applications, sur les polynômes symétriques élémentaires, et sur les relations entre coefficients et racines d'un polynôme.

On y démontre la proposition suivante.

Proposition. *Le jacobien de l'application* $(x_1, \dots, x_n) \mapsto (\sigma_1, \dots, \sigma_n)$ *où* σ_i *est le i-ième polynôme symétrique élémentaire en les* x_j *vaut* $\prod_{i<j}(x_i - x_j)$*, soit* $(-1)^{n(n-1)/2}$ *fois le déterminant de Vandermonde des* x_i*.*

Étant donné un ensemble X, on note $\mathcal{C}_X^n$ l'ensemble des parties de X à n éléments. Le polynôme symétrique élémentaire de degré i en les variables $\{x_1, \dots, x_n\} = X$ est défini par

$$\sigma_i = \sum_{P \in \mathcal{C}_X^i} \prod_{x \in P} x$$

Trions les parties P selon qu'elles contiennent x_j ou non. On obtient le lemme:

Lemme. *Notons* $\sigma_i^{(j)}$ *le polynôme symétrique élémentaire de degré* i *en les variables* $x_1, \dots, x_{j-1}, x_{j+1}, \dots, x_n$ *(*x_j *exclu). Ce polynôme vérifie*

$$\sigma_i = x_j \sigma_{i-1}^{(j)} + \sigma_i^{(j)} .$$

Par conséquent $\dfrac{\partial \sigma_i}{\partial x_j} = \sigma_{i-1}^{(j)}$ et le jacobien correspondant vaut

$$J_n = \begin{vmatrix} \frac{\partial \sigma_1}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial \sigma_1}{\partial x_n} \\ \dots & \frac{\partial \sigma_i}{\partial x_j} & \dots \\ \frac{\partial \sigma_n}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial \sigma_n}{\partial x_n} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \sigma_0 & \dots & \sigma_0 \\ \dots & \sigma_{i-1}^{(j)} & \dots \\ \sigma_{n-1}^{(1)} & \dots & \sigma_{n-1}^{(n)} \end{vmatrix} .$$

La première ligne est faite de 1. Pour calculer ce déterminant, soustrayons la dernière colonne des colonnes 1 à $n-1$. Le coefficient en i-ième ligne et j-ième colonne vaut, en utilisant le lemme,

$$\begin{aligned} \sigma_{i-1}^{(j)} - \sigma_{i-1}^{(n)} &= x_n \sigma_{i-2}^{(jn)} + \sigma_{i-1}^{(jn)} - (x_j \sigma_{i-2}^{(jn)} + \sigma_{i-1}^{(jn)}) \\ &= (x_n - x_j)\sigma_{i-2}^{(jn)} \end{aligned}$$

en notant $\sigma_i^{(jn)}$ le polynôme symétrique élémentaire de degré i sur les n variables sauf x_j et x_n. Par conséquent on peut mettre $(x_n - x_j)$ en facteur dans la j-ième colonne, sortir tous ces facteurs, développer par rapport à la première ligne, et on obtient

$$J_n = \Big[(-1)^{n-1} \prod_{1\le j<n} (x_n - x_j)\Big] J_{n-1} = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} \prod_{i>j} (x_i - x_j) = \prod_{i<j} (x_i - x_j).$$

C'est le déterminant de Vandermonde des x_j, au signe près, cqfd.

Deuxième démonstration: On constate d'abord que $\frac{\partial \sigma_k}{\partial x_i} = \frac{\partial \sigma_k}{\partial x_j}$ si $x_i = x_j$; les colonnes i et j du déterminant sont alors égales, et ça implique que $\prod_{i<j}(x_i - x_j)$ est un facteur du déterminant. Une inspection des degrés ($n(n-1)/2$) montre que le quotient est une constante. On la trouve en cherchant obtenir le monôme $x_1^{n-1} x_2^{n-2} \dots x_{n-1}$ en choisissant un coefficient dans chaque ligne (et chaque colonne).

C'est clair pour le coefficient de dernière ligne: il ne doit pas contenir x_n; c'est donc le dernier: $x_1 \dots x_{n-1}$. Il reste alors $x_1^{n-2} x_2^{n-3} \dots x_{n-2}$ à produire.

Par hypothèse de récurrence, en ligne $n - i$ on doit prendre un coefficient en colonne $j \le n - i$ et ce coefficient doit contenir un monôme divisant $x_1^{n-1-i} x_2^{n-2-i} \dots x_{n-1-i}$. C'est donc $m = x_1 x_2 \dots x_{n-1-i}$. Or dans la colonne j ne figure pas x_j. Il faut donc prendre $j > n - 1 - i$. Seule possibilité: $j = n - i$. Il reste à produire $x_1^{n-2-i} x_2^{n-3-i} \dots x_{n-2-i}$, et on se restreint aux colonnes de 1 à $n - i - 1$.

On trouve ainsi $x_1^{n-1} x_2^{n-2} \dots x_{n-1}$ en faisant le produit des coefficients figurant sur la diagonale principale, cqfd.

Une troisième démonstration – M. Coste

Tout se passe dans l'anneau $R = \mathbb{Z}[x_1, \dots, x_n]$. On y a les polynômes symétriques élémentaires σ_i, les sommes de puissances $S_i = \sum_{j=1}^n x_j^i$, leurs dérivées partielles par rapport aux x_i et les formules de Newton (voir par exemple Gourdon, Algèbre, p. 81)

$$S_k = (-1)^{k-1} k \sigma_k + \sum_{1<i<k} (-1)^{i-1} S_{k-i} \sigma_i \quad \text{pour } 1 \le k \le n \ .$$

On en tire

$$\frac{\partial S_k}{\partial x_j} = (-1)^{k-1} k \,\frac{\partial \sigma_k}{\partial x_j} + \sum_{1<i<k} (-1)^{i-1} \left(\frac{\partial S_{k-i}}{\partial x_j}\, \sigma_i + S_{k-i}\, \frac{\partial \sigma_i}{\partial x_j} \right) \ ,$$

et donc par récurrence immédiate sur k le vecteur des dérivées partielles de S_k est égal à $(-1)^{k-1}k$ fois le vecteur des dérivées partielles de σ_k, plus une combinaison linéaire à coefficients dans R des vecteurs des dérivées partielles des σ_i pour $1 < i < k$. Le déterminant jacobien des sommes de puissances vaut donc $(-1)^{n(n-1)/2} n!$ fois le déterminant jacobien des polynômes symétriques élémentaires. Par ailleurs un calcul direct montre que le déterminant jacobien des sommes de puissances vaut $n!$ fois le déterminant de Vandermonde. On peut sans scrupule diviser par $n!$, puisqu'on travaille dans l'anneau intègre R. Donc, le déterminant jacobien des polynômes symétriques élémentaires vaut $(-1)^{n(n-1)/2}$ fois le déterminant de Vandermonde.