Polygones et polyèdres

Exercice 1. Montrez qu'un polyèdre possède au moins deux faces ayant le même nombre de côtés.

Exercice 2. Montrez qu'un tétraèdre non aplati possède une sphère circonscrite et une sphère inscrite.

Exercice 3. On dit qu'un tétraèdre est *orthocentrique* si ses quatre hauteurs sont concourantes.

(1) Donnez un exemple de tétraèdre non orthocentrique.

(2) Montrez qu'un tétraèdre qui possède trois hauteurs concourantes est orthocentrique.

(3) Montrez qu'un tétraèdre qui possède une hauteur dont le pied est l'orthocentre de sa face est orthocentrique. Réciproque ?

Exercice 4. Dans un tétraèdre, on appelle *orthoplan* un plan orthogonal à une arête et passant par le milieu de l'arête opposée. On note G l'isobarycentre et s la symétrie de centre G.

(1) Montrez que l'image d'un orthoplan par s est le plan médiateur d'une arête.

(2) Déduisez-en que les six orthoplans se coupent en un point M appelé *point de Monge* du tétraèdre, et qu'on a la *relation d'Euler* $\overrightarrow{OM} = 2\overrightarrow{OG}$ où O est le centre de la sphère circonscrite.

(3) Montrez que si le tétraèdre est orthocentrique, son orthocentre est le point de Monge.

Exercice 5. Soit $P = A_1A_2 \dots A_n$ un polygone convexe à $n \geqslant 3$ côtés. Étudiez les implications entre les assertions suivantes :

(i) tous les côtés de P sont égaux et tous les angles de P sont égaux ;

(ii) tous les côtés de P sont égaux et tous ses sommets sont situés sur un cercle ;

(iii) tous les angles de P sont égaux et tous ses sommets sont situés sur un cercle.

Commentaire culturel sur le sujet de l'écrit Math. Géné. 2012. La formule de Pick (1859-1942) est un cas particulier d'un théorème de Eugène Ehrhart (1906-2000) qui s'énonce ainsi.

Soit M le réseau des points entiers d'un espace euclidien, P l'enveloppe convexe d'un nombre fini de points de M et P° l'intérieur de P dans l'espace affine qu'il engendre, de dimension $\dim(P)$. Alors, il existe une fonction polynomiale i_P telle que $i_P(n) = \mathrm{card}(M \cap nP)$ pour tout entier $n \geqslant 1$. De plus, on a $i_P(0) = 1$ et $i_P(-n) = (-1)^{\dim(P)}\mathrm{card}(M \cap nP^\circ)$ pour tout entier $n \geqslant 1$ (« loi de réciprocité »).

Eugène Ehrhart a fait une carrière d'enseignant en lycée. En 1966 (à l'âge de 60 ans !), il a obtenu un doctorat en soutenant une thèse intitulée *Sur un problème de géométrie diophantienne linéaire.*