Université de Rennes 1
Préparation à l'agrégation
de mathématiques
Auteur du document :

A. Paugam

Les quaternions

1 Une algèbre à division

On note $\mathbb{H}$ l'ensemble des matrices carrées 2x2 à coefficients dans $\mathbb{C}$ de la forme $\begin{pmatrix} u & v \\ -\overline{v} & \overline{u} \end{pmatrix}$. Les éléments de $\mathbb{H}$ sont appelés quaternions.
On définit, dans $\mathbb{H}$, des éléments, qu'il ne faudra pas confondre avec les éléments de $\mathbb{C}$ notés de la même manière.

$$i = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix},\ j = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix},\ k = ij = \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}$$

1.1. Vérifier que $\mathbb{H}$ est une $\mathbb{R}$-algèbre non commutative dont $\{1, i, j, k\}$ forment une base comme $\mathbb{R}$-espace vectoriel. Vérifier que $i^2 = j^2 = -1$ et $ij = -ji$. On en déduit $k^2 = -1$, $jk = -kj = i$, $ki = -ik = j$.

Dans la suite q désigne le quaternion $a + bi + cj + dk$, a, b, c, d étant réels. q_1 désigne un second quaternion.
On définit la conjugaison dans $\mathbb{H}$, qu'on ne confondra pas avec la conjugaison dans $\mathbb{C}$, notée de la même manière, en posant $\overline{q} = a - bi - cj - dk$.
On définit une application N de $\mathbb{H}$ dans $\mathbb{R}$, appelée norme, par $N(q) = q\overline{q}$.

1.2. Vérifier que $N(q) = \text{dét}(q) = a^2 + b^2 + c^2 + d^2$, $N(qq_1) = N(q)N(q_1)$ et que $\overline{qq_1} = \overline{q_1}\ \overline{q}$
En déduire que $\mathbb{H}$ est une algèbre à division (un "corps" non commutatif).
On peut déduire également de la norme que l'ensemble des sommes de quatre carrés d'éléments de $\mathbb{Z}$ est stable pour la multiplication.

On dit que q, non nul, est pur si sa partie réelle est nulle : $a = 0$. On note $\mathbb{P}$ l'ensemble des quaternions purs.
1.3. Montrer que $q \in \mathbb{R}$ si et seulement si $q^2 \in \mathbb{R}^+$.
Montrer que $q \in \mathbb{P}$ si et seulement si $q^2 \in \mathbb{R}^-$.

2 Un espace euclidien isomorphe à $\mathbb{R}^4$

2.1. On pose $f(q, q_1) = \frac{1}{2}(q\overline{q_1} + q_1\overline{q})$
Vérifier que f est un produit scalaire sur $\mathbb{H}$, que la norme associée à f est $\| q \| = \sqrt{N(q)}$ et que la base $\{1, i, j, k\}$ est orthonormée.

2.2. En identifiant les quaternions de norme 1, à la sphère unité S_3 de $\mathbb{R}^4$, remarquer que cette sphére est munie d'une structure de groupe topologique multiplicatif, comme S_1, mais, non abélien.

3 Quaternions et groupe orthogonal

On fait opérer $\mathbb{H}^*$ sur $\mathbb{H}$ par automorphisme intérieur.

$$\begin{array}{rccl} S: & \mathbb{H}^* & \longrightarrow & Int(\mathbb{H}) \\ & q & \longmapsto & (S_q : q' \mapsto qq'q^{-1}). \end{array}$$

3.1. Montrer que S_q est linéaire bijective et appartient au groupe $O(\mathbb{H})$.

3.2. Montrer que $\mathbb{P}$ est un sous espace stable par S_q.
(Remarquer que $\mathbb{R}$ et $\mathbb{P}$ sont deux sous espaces orthogonaux de $\mathbb{H}$).

Soit s_q la restriction de S_q aux quaternions purs, $\mathbb{P}$, identifié à $\mathbb{R}^3$. On a alors un morphisme de groupe

$$\begin{array}{rccl} s: & \mathbb{H}^* & \longrightarrow & O(3,\mathbb{R}) \\ & q & \longmapsto & (s_q : \mathbb{P} \mapsto \mathbb{P}) \end{array}$$

3.3. On remarque que si λ est réel, $S(\lambda q) = S(q)$. On peut donc se restreindre, pour étudier s, aux quaternions de norme 1, que l'on identifie à la sphère unité S_3 de $\mathbb{R}^4$. Montrer que $s(S_3)$ est connexe dans $O(3,\mathbb{R})$. En déduire que $s(S_3)$ est contenu dans $O^+(3,\mathbb{R})$, composante connexe de l'identité.

3.4. Montrer que $s_{bi+cj+dk}$ est un demi-tour, rotation d'angle π, d'axe (b,c,d).

3.5. En utilisant le fait que $O^+(3,\mathbb{R})$ est engendré par les demi-tours [Aud], montrer que $s(S_3) = O^+(3,\mathbb{R})$.

3.6. Montrer que $s_{a+bi+cj+dk}$ est une rotation, d'axe (b,c,d), dont on déterminera l'angle dans l'intervalle $[0,\pi]$ à l'aide de la trace.[Aud]
Cette paramétrisation de $O^+(3,\mathbb{R})$ permet de calculer le composé de deux rotations dans dans l'espace $\mathbb{R}^3$. Expliciter la méthode pour ce calcul. Calculer, en particulier, le composé de deux demi-tours d'axe orthogonaux.

3.7. Montrer que l'on a une suite exacte, non scindée

$$1 \longrightarrow \{-1,1\} \longrightarrow S_3 \longrightarrow O^+(3,\mathbb{R}) \longrightarrow 1$$

En déduire que $O^+(3,\mathbb{R})$ est homéomorphe à l'espace projectif $P^3(\mathbb{R})$.

References

[Per] D.Perrin, Cours d'algèbre, ch VII, Ellipes (1996).

[Ber] M.Berger, Géométrie, ch 8, Nathan.

[Aud] M.Audin, Géométrie, ch IV, Belin.