

Séries formelles

Michel Coste

26 septembre 2012

Programme : Séries formelles à une indéterminée à coefficients dans un corps. Addition, multiplication, composition, éléments inversibles.

Rapport de jury 2010, 114 - Anneau des séries formelles. Applications : C'est une leçon qui doit être illustrée par de nombreux exemples et applications ; combinatoire, calcul des sommes de Newton, relations de récurrence, etc.

1 Définition, opérations

Une série formelle en X sur le corps \mathbb{K} est une expression :

$$\sum_{n \geq 0} a_n X^n = a_0 + a_1 X + a_2 X^2 + \cdots + a_n X^n + \cdots ,$$

où les a_n sont des éléments de \mathbb{K} . Contrairement aux polynômes, on ne suppose pas qu'il n'y a qu'un nombre fini de coefficients a_n non nuls.

Pour formaliser cette définition, et définir les opérations (somme, produit par un scalaire de \mathbb{K} , produit de deux séries formelles), on considère une série formelle $\sum_{n \geq 0} a_n X^n$ comme la suite de ses coefficients $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$. Sur le \mathbb{K} -espace vectoriel des suites indexées par \mathbb{N} d'éléments de \mathbb{K} on définit la multiplication de $S = (a_p)_{p \in \mathbb{N}}$ et de $T = (b_q)_{q \in \mathbb{N}}$ en posant $ST = (c_n)_{n \in \mathbb{N}}$ où $c_n = \sum_{p+q=n} a_p b_q$.

Définition 1 *L'espace vectoriel des suites d'éléments de \mathbb{K} indexées par \mathbb{N} , muni de la multiplication interne définie ci-dessus, est une \mathbb{K} -algèbre commutative appelée **algèbre des séries formelles à une indéterminée sur \mathbb{K}** . Cette algèbre se note $\mathbb{K}[[X]]$.*

On continue bien sûr d'utiliser la notation $\sum_{n \geq 0} a_n X^n$ plutôt que $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$. Les polynômes forment une sous-algèbre de l'algèbre des séries formelles : ce sont les séries formelles qui n'ont qu'un nombre fini de coefficients non nuls.

Exercice 1

Calculer $(\sum_{n \geq 0} X^n)^2 = (1 + X + X^2 + \cdots)^2$.

2 Ordre, familles sommables

Définition 2 *Si $S = \sum_{n \geq 0} a_n X^n \in \mathbb{K}[[X]]$, si $S \neq 0$, on appelle **ordre** (ou **valuation**) de S , noté $\text{ord}(S)$, l'entier $\min\{n \in \mathbb{N}, a_n \neq 0\}$. On convient que $\text{ord}(0) = +\infty$.*

Théorème 3 Si S et T sont deux séries formelles, on a :

$$\text{ord}(S + T) \geq \min(\text{ord}(S), \text{ord}(T)) \quad \text{ord}(ST) = \text{ord}(S) + \text{ord}(T)$$

Corollaire 4 $\mathbb{K}[[X]]$ est une algèbre intègre.

Exercice 2

Montrer que les séries formelles d'ordre $\geq N$ forment un idéal de $\mathbb{K}[[X]]$.

Définition 5 Soit $(S_i)_{i \in I}$ une famille de séries formelles : $S_i = \sum_{n \geq 0} a_{i,n} X^n$. Cette famille est dite **sommable** si pour tout $n \in \mathbb{N}$ la famille $(a_{i,n})_{i \in I}$ ne comprend qu'un nombre fini de coefficients non nuls.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on pose alors $c_n = \sum_{i \in I} a_{i,n}$ et la série formelle $\sum_{n \geq 0} c_n X^n$ est appelée somme de la famille $(S_i)_{i \in I}$ et est notée $\sum_{i \in I} S_i$.

Une famille $(S_i)_{i \in I}$ est sommable si et seulement si pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'ensemble des $i \in I$ tels que $\text{ord}(S_i) \leq n$ est fini.

Exemples

- Si la famille $(S_i)_{i \in \mathbb{N}}$ indexée par \mathbb{N} est telle que, pour tout $i \in \mathbb{N}$, on a $\text{ord}(S_i) \geq i$, alors cette famille est sommable et on peut former $\sum_{i \in \mathbb{N}} S_i$.
- La famille $(a_n X^n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une famille sommable. Cela justifie la notation $\sum_{n \geq 0} a_n X^n$ pour désigner une série formelle.

Théorème 6 1. Toute sous-famille d'une famille sommable est sommable.

2. Si la famille $(S_i)_{i \in I}$ est sommable et si $I = \bigcup_{j \in J} I_j$ est une partition de I , alors $\sum_{i \in I} S_i = \sum_{j \in J} \left(\sum_{i \in I_j} S_i \right)$.

3. Si la famille $(S_i)_{i \in I}$ est sommable alors pour tout $T \in \mathbb{K}[[X]]$ la famille $(S_i T)_{i \in I}$ l'est aussi et on a : $(\sum_{i \in I} S_i) T = \sum_{i \in I} S_i T$.

Un mot ici sur une manière de démontrer ces égalités : on utilise le fait que si, pour tout entier n , on a $\text{ord}(A - B) > n$, alors $A = B$. Montrons par exemple 3. Fixons $n \in \mathbb{N}$, et soit $J = \{i \in I \mid \text{ord}(S_i) \leq n\}$. L'ensemble J est fini puisque la famille $(S_i)_{i \in I}$ est sommable, et donc $(\sum_{i \in J} S_i) T = \sum_{i \in J} S_i T$ par la distributivité ordinaire. Comme $(\sum_{i \in I} S_i) T - (\sum_{i \in J} S_i) T$ et $\sum_{i \in I} S_i T - \sum_{i \in J} S_i T$ sont tous deux d'ordre $> n$, on en déduit que $(\sum_{i \in I} S_i) T - \sum_{i \in I} S_i T$ est d'ordre $> n$.

3 Composition de séries formelles

Définition 7 Soit $S \in \mathbb{K}[[X]]$ telle que $\text{ord}(S) \geq 1$ et $T = \sum_{n \geq 0} b_n X^n \in \mathbb{K}[[X]]$. On appelle composée de T par S et on note $T \circ S$ (ou $T(\bar{S})$) la série formelle $\sum_{n \geq 0} b_n S^n$. On dit que $T \circ S$ est obtenue par **composition de T avec S** .

Il faut remarquer qu'il est essentiel de supposer $\text{ord}(S) \geq 1$. Ceci entraîne que $\text{ord}(b_n S^n) \geq n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, et donc la famille $(b_n S^n)_{n \in \mathbb{N}}$ est bien sommable.

Exercice 3

Si $\text{ord}(S) = p$ et $\text{ord}(T) = q$, que vaut $\text{ord}(T \circ S)$?

Théorème 8 L'application $T \mapsto T \circ S$ de $\mathbb{K}[[X]]$ dans lui-même est un homomorphisme de \mathbb{K} -algèbre.

Ceci veut dire qu'on a les propriétés suivantes de la substitution :

$$\begin{aligned}(T_1 + T_2) \circ S &= T_1 \circ S + T_2 \circ S \\ (T_1 T_2) \circ S &= (T_1 \circ S)(T_2 \circ S) \\ \lambda \circ S &= \lambda \quad (\lambda \in \mathbb{K})\end{aligned}$$

Théorème 9 Soient S, T et U dans $\mathbb{K}[[X]]$ avec $\text{ord}(S) \geq 1$, $\text{ord}(T) \geq 1$ (et donc $\text{ord}(T \circ S) \geq 1$). Alors $U \circ (T \circ S) = (U \circ T) \circ S$.

Ces théorèmes se démontrent aussi par le procédé indiqué à la suite du Théorème 6.

4 Inverse d'une série formelle, Développement en série formelle d'une fraction rationnelle

4.1 Séries formelles inversibles

Dans $\mathbb{K}[[X]]$, on a l'identité :

$$(1 - X)(1 + X + X^2 + \dots + X^n + \dots) = 1.$$

Donc $1 - X$ est inversible et $(1 - X)^{-1} = \sum_{n \geq 0} X^n$. C'est cet exemple fondamental qui nous permet de déterminer les séries formelles inversibles.

Théorème 10 Soit $S = \sum_{n \geq 0} a_n X^n \in \mathbb{K}[[X]]$. Pour que S soit inversible dans $\mathbb{K}[[X]]$ il faut et il suffit que $a_0 \neq 0$, c'est-à-dire que $\text{ord}(S) = 0$.

Exemple. Si S est une série formelle d'ordre ≥ 1 , on a $(1 - S)^{-1} = \sum_{n \geq 0} S^n$. Si $T = \sum_{n \geq 0} a_n X^n$ avec $a_0 \neq 0$, alors on peut écrire $T = a_0(1 - S)$ où $S = 1 - \frac{1}{a_0}T = \frac{-1}{a_0}(a_1 X + a_2 X^2 + \dots)$ est d'ordre ≥ 1 , et $T^{-1} = \frac{1}{a_0} \sum_{n \geq 0} S^n$.

Exercice 4

Identifier tous les idéaux de $\mathbb{K}[[X]]$. Montrer que le corps de fractions de $\mathbb{K}[[X]]$ est le corps des séries formelles de Laurent $\mathbb{K}((X))$ formée des séries de la forme $\sum_{n \geq n_0} a_n X^n$ où $n_0 \in \mathbb{Z}$, avec un nombre finis de termes à exposants négatifs.

Pour $S = \sum_{n \geq 0} a_n X^n \in \mathbb{K}[[X]]$ on note $S_N = \sum_{n=0}^N a_n X^n$ (c'est le polynôme tronqué à l'ordre N de S) et on remarque que $\text{ord}(S - S_N) \geq N + 1$. Soit $T \in \mathbb{K}[[X]]$ inversible, et soit $Q = ST^{-1}$ dans $\mathbb{K}[[X]]$. Alors pour tout $N \in \mathbb{N}$, Q_N est le quotient dans la division suivant les puissances croissantes de S_N par T_N .

4.2 Développement en série formelle d'une fraction rationnelle

Définition 11 Si $F = \frac{P}{Q}$ est une fraction rationnelle sous forme réduite sans pôle en 0 (c'est-à-dire $Q(0) \neq 0$) alors la série formelle PQ^{-1} est appelée **développement en série formelle de F** .

Le développement en série formelle est un homomorphisme injectif de l'algèbre des fractions rationnelles sans pôle en 0 dans $\mathbb{K}[[X]]$. En particulier, le développement en série formelle d'une somme (resp. d'un produit) de fractions rationnelles sans pôle en 0 est la somme (resp. le produit) des développements en série formelle. Concrètement, il peut être commode pour calculer le développement en série formelle de passer par la décomposition de la fraction rationnelle en éléments simples sur \mathbb{C} , comme le montre l'exercice suivant :

Exercice 5

Développer en série formelle $\frac{1}{(X-1)(X-2)}$.

Mais pour l'exercice suivant, la décomposition en éléments simples n'est pas une bonne idée.

Exercice 6

Développer en série formelle $\frac{1}{(1-X^5)}$.

Quelques autres exercices.

Exercice 7

Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ le développement en série formelle de la fraction $\frac{1}{(1-X)^{n+1}}$ est donné par :

$$\frac{1}{(1-X)^{n+1}} = \sum_{p \geq 0} \binom{n+p}{p} X^p.$$

Exercice 8

Développer en série formelle :

(a) $F = \frac{1}{1+X+X^2+\dots+X^{n-1}}$

(b) $F = \frac{1}{(1-aX)^p(1-bX)^q} \quad (a \neq b)$

4.3 Une application combinatoire

De combien de manières différentes peut-on payer une somme de 20,12€ avec des pièces de 1, 2 et 5 centimes ?

De manière plus générale, on veut trouver pour $n \in \mathbb{N}$ le nombre f_n de triplets $(a, b, c) \in \mathbb{N}^3$ tels que $a + 2b + 5c = n$. On introduit la série génératrice $\sum_{n \in \mathbb{N}} f_n X^n$ et on remarque que cette série est le développement en série formelle de $F = \frac{1}{(1-X)(1-X^2)(1-X^5)}$. En effet,

$$F = \frac{1}{1-X} \times \frac{1}{1-X^2} \times \frac{1}{1-X^5} = \left(\sum_{a \in \mathbb{N}} X^a \right) \left(\sum_{b \in \mathbb{N}} X^{2b} \right) \left(\sum_{c \in \mathbb{N}} X^{5c} \right) = \sum_{(a,b,c) \in \mathbb{N}^3} X^{a+2b+5c}.$$

On fait la décomposition en éléments simples sur \mathbb{Q} :

$$F = \frac{1}{10(1-X)^3} + \frac{1}{4(1-X)^2} + \frac{13}{40(1-X)} + \frac{1}{8(1+X)} + \frac{X^3 + 2X^2 + X + 1}{5(X^4 + X^3 + X^2 + X + 1)}$$

Il reste à développer en série formelle chacun des éléments simples. Pour le dernier, il est plus avantageux de multiplier dénominateur et numérateur par $1-X$ pour obtenir $\frac{1+X^2-X^3-X^4}{5(1-X^5)}$. On obtient

$$f_n = \frac{(n+1)(n+2)}{20} + \frac{n+1}{4} + \frac{13}{40} + \frac{(-1)^n}{8} + \begin{cases} 1/5 & \text{si } n \equiv 0, 2 \pmod{5} \\ 0 & \text{si } n \equiv 1 \pmod{5} \\ -1/5 & \text{si } n \equiv 3, 4 \pmod{5} \end{cases}.$$

En particulier $f_{2012} = 203213$.

La résolution demande pas mal de calcul pour la décomposition en éléments simples. Mais l'obtention de l'élément simple $\frac{1}{10(1-X)^3}$ est très aisée, et ceci suffit pour obtenir l'équivalent $f_n \sim n^2/20$ pour $n \rightarrow \infty$.

4.4 Relations de Newton

Montrons comment l'utilisation du développement en série formelle permet d'obtenir les relations de Newton entre polynôme symétriques élémentaires et sommes de puissances. Soit

$$P(T) = T^n + a_1 T^{n-1} + \dots + a_n = \prod_{i=1}^n (T - \alpha_i)$$

un polynôme scindé. On sait que les coefficients a_k sont, au signe près, les polynômes symétriques élémentaires en les racines α_i (relations coefficients-racines) :

$$a_k = (-1)^k \sigma_k(\alpha_1, \dots, \alpha_n) = (-1)^k \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n} \alpha_{i_1} \cdots \alpha_{i_k}.$$

Les sommes de puissances des racines sont $N_k = \sum_{i=1}^n \alpha_i^k$.

On calcule la dérivée logarithmique dans le corps des fractions rationnelles en T :

$$\frac{P'(T)}{P(T)} = \sum_{i=1}^n \frac{1}{T - \alpha_i} = \frac{1}{T} \sum_{i=1}^n \frac{1}{1 - \frac{\alpha_i}{T}}.$$

En faisant le changement de variables $T = 1/X$, on obtient dans le corps des fractions rationnelles en X , après multiplication par X^{n-1} :

$$X^{n-1}P'(1/X) = X^n P(1/X) \sum_{i=1}^n \frac{1}{1 - \alpha_i X}.$$

Par développement en série formelle, on a

$$\sum_{i=1}^n \frac{1}{1 - \alpha_i X} = \sum_{i=1}^n \sum_{k \in \mathbb{N}} \alpha_i^k X^k = \sum_{k \in \mathbb{N}} N_k X^k.$$

Il ne reste plus qu'à identifier les coefficients de X^k des deux côtés de l'identité

$$n + (n-1)a_1 X + \cdots + a_{n-1} X^{n-1} = (1 + a_1 X + \cdots + a_n X^n) \sum_{k \in \mathbb{N}} N_k X^k.$$

Ceci donne

$$\begin{aligned} N_k + N_{k-1}a_1 + \cdots + N_1 a_{k-1} + k a_k &= 0 \quad \text{pour } k = 1, \dots, n, \\ N_k + N_{k-1}a_1 + \cdots + N_{k-n}a_n &= 0 \quad \text{pour } k > n. \end{aligned}$$

On peut bien sûr remplacer a_i par $(-1)^i \sigma_i$ pour obtenir la formulation habituelle des relations de Newton. Les relations de Newton permettent, par récurrence sur k , d'exprimer chaque a_k comme combinaison linéaire à coefficients rationnels de N_1, \dots, N_k (sur un corps de caractéristique 0). Ceci est la base de la méthode de Leverrier pour calculer le polynôme caractéristique d'une matrice A à partir des traces des puissances de A .

5 Dérivée d'une série formelle

Définition 12 Si $S = \sum_{n \geq 0} a_n X^n \in \mathbb{K}[[X]]$, on appelle *dérivée de S* et on note S' la série formelle $\sum_{n \geq 0} (n+1) a_{n+1} X^n$.

La dérivation des séries formelles prolonge la dérivation des polynômes (et aussi celle des fractions rationnelles sans pôle en 0), et elle possède les propriétés habituelles :

$$(S+T)' = S' + T', \quad (\lambda S)' = \lambda S' \quad (\lambda \in \mathbb{K}), \quad (ST)' = S'T + ST'.$$

Exercice 9

Déduire des propriétés ci-dessus que si S est d'ordre 0, $(S^{-1})' = -S'/S^2$.

Exercice 10

Retrouver en utilisant la dérivation le résultat de l'exercice 7.

Exercice 11

On suppose \mathbb{K} de caractéristique 0. Soit $A, B \in \mathbb{K}[[X]]$, $y_0 \in \mathbb{K}$. Montrer que l'équation différentielle $Y' = AY + B$ avec la condition initiale $Y(0) = y_0$ admet une unique solution dans $\mathbb{K}[[X]]$.

6 Séries de Taylor de fonctions

Soit f une fonction C^∞ sur un intervalle ouvert I contenant 0. On peut lui associer sa série de Taylor (en 0)

$$\text{Taylor}(f) = f(0) + f'(0)X + \frac{f''(0)}{2!}X^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}X^n + \cdots \in \mathbb{R}[[X]].$$

Une telle série de Taylor ne converge pas forcément ; en fait, toute série formelle à coefficients réels est série de Taylor d'une fonction C^∞ . Les tronqués de la série de Taylor sont les parties principales des développements limités de la fonction f en 0. L'application $f \mapsto \text{Taylor}(f)$ est un homomorphisme de \mathbb{R} -algèbre de $C^\infty(I, \mathbb{R})$ dans $\mathbb{R}[[X]]$. En particulier on a

$$\begin{aligned} \text{Taylor}(f + g) &= \text{Taylor}(f) + \text{Taylor}(g) \\ \text{Taylor}(fg) &= \text{Taylor}(f) \times \text{Taylor}(g) \end{aligned}$$

On a aussi $\text{Taylor}(f') = (\text{Taylor}(f))'$ et, si $g(0) = 0$, $\text{Taylor}(f \circ g) = \text{Taylor}(f) \circ \text{Taylor}(g)$.

En particulier (avec pas mal d'abus de notations (dont celui consistant à désigner de la même façon une fonction et sa série de Taylor) on a, dans $\mathbb{Q}[[X]]$, $\ln(1+X) \circ (\exp(X)-1) = X$ et $\exp(X) \circ \ln(1+X) = 1+X$. Cette égalité formelle entraîne que, sur n'importe quel corps \mathbb{K} de caractéristique 0, l'exponentielle est une bijection de l'ensemble des matrices $n \times n$ nilpotentes sur l'ensemble des matrices unipotentes (de la forme l'identité plus une nilpotente), dont l'inverse est le logarithme népérien ($M \mapsto \sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{(-1)^n}{n+1} M^{n+1}$).

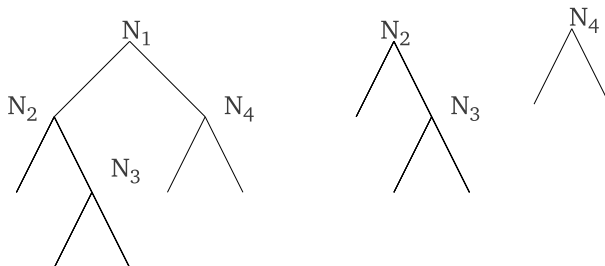
Exercice 12

Montrer que le développement en série formelle de $\sqrt{1-4X}$ est

$$1 - \sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{2}{n+1} \binom{2n}{n} X^{n+1}$$

7 Arbres binaires

Nous terminons avec une application des séries à un problème de dénombrement : on veut déterminer le nombre b_n d'arbres binaires à n noeuds (avec $n \in \mathbb{N}$). Voici à gauche un arbre binaire avec quatre noeuds N_1, \dots, N_4 (chaque noeud a exactement deux fils).



Nous allons calculer la série formelle $S = \sum_{n \in \mathbb{N}} b_n X^n$, appelée la série génératrice du problème de dénombrement. Cette méthode est employée pour un grand nombre de problèmes de dénombrement, et nous en avons vu un autre exemple en 4.3.

Parmi les arbres binaires il y a :

- l'arbre trivial réduit à un seul point qui est à la fois la racine et l'unique feuille, il n'a pas de noeud ;
- les arbres où la racine a pour descendants un sous-arbre binaire à gauche et un autre sous-arbre binaire à droite. Le nombre total de noeuds est alors la somme des nombres de noeuds du sous-arbre de gauche et du sous-arbre de droite, plus un : la racine (voir le dessin ci-dessus).

On a donc $b_0 = 1$ et $b_n = \sum_{p+q=n-1} b_p b_q$ (*) pour $n \geq 1$, correspondant aux différents choix possibles des sous-arbres de gauche et de droite. La série génératrice vérifie donc l'équation $S = 1 + XS^2$, et c'est la solution dans $\mathbb{R}[[X]]$ entièrement déterminée par le fait qu'elle commence par 1 (en effet la suite b_n est entièrement déterminée par $b_0 = 1$, et la relation (*)). Or, les solutions de $S^2 - S + X = 0$ (dans le corps de fractions $\mathbb{R}((X))$, voir l'exercice 4) sont $\frac{1 \pm \sqrt{1 - 4X}}{2X}$ et la solution qui commence par 1 est

$$S = \frac{1 - \sqrt{1 - 4X}}{2X} = \sum_n \frac{1}{n+1} \binom{2n}{n} X^n$$

(on a utilisé la formule de l'exercice 12). Le nombre d'arbres binaires à n noeuds est donc $\frac{1}{n+1} \binom{2n}{n}$ (par exemple, $b_{10} = 16796$). Ces nombres sont appelés les **nombres de Catalan**.

Références

- [C] H. Cartan, Théorie élémentaire des fonctions analytiques, Hermann. (*Les toutes premières pages.*)
- [AF] J-M. Arnaudiès et H. Fraysse, Cours de mathématiques I - Algèbre, Dunod. (*La fin du chapitre VIII.*)