Sous-groupes compacts du groupe linéaire

Michel Coste

29 septembre 2006

Tout sous-groupe compact G du groupe linéaire $\mathrm{GL}(n,\mathbb{R})$ *est conjugué à un sous-groupe du groupe orthogonal* $\mathrm{O}(n)$.

Il y a une démonstration de ceci dans Mneimné-Testard (Groupes de Lie classiques : 3.6.5). Berger propose trois démonstrations (Géométrie : 8.2.5 et 11.8.10.8). On peut trouver aussi une démonstration dans un texte de Bachir Bekka :

http ://agreg-maths.univ-rennes1.fr/documentation/docs/PointFixe.pdf

La démonstration qui figure ici est reprise d'Alessandri (Thèmes de géométrie, p. 141) avec un raccourci venant d'un agrégatif inconnu. Elle est élémentaire, dans le sens qu'elle n'utilise pas de mesure. On utilise par contre fortement la convexité. Précisément, les résultats concernant la convexité dont nous auront besoin sont (tout se passe dans un espace affine réel de dimension finie) :

1. L'image par une application affine f de l'enveloppe convexe d'un sous-ensemble L est l'enveloppe convexe de $f(L)$ (description de l'enveloppe convexe comme ensemble des barycentres à poids ≥ 0 de points de L).
2. L'enveloppe convexe d'un sous-ensemble compact est compacte (conséquence du théorème de Caratheodory).

On veut trouver une forme quadratique définie positive q sur $\mathbb{R}^n$ telle que $G \subset \mathrm{O}(q)$, c.-à-d. telle que q soit invariante par G. Matriciellement, on cherche une matrice symétrique définie positive s (matrice de q) telle que ${}^t\!g\, s\, g = s$ pour tout $g \in G$. Étant donné un tel q, soit u la matrice de passage de la base canonique à une base orthonormale pour q (matriciellement, ${}^t\!u\, s\, u = I_n$). Alors on aura $u^{-1}\, G\, u \subset \mathrm{O}(n)$.

Le groupe G agit (à droite) linéairement sur l'espace vectoriel S_n des matrices symétriques $n \times n$ par $s \cdot g = {}^t\!g\, s\, g$. Autrement dit, l'application $\rho : G \to \mathrm{GL}(S_n)$ définie par $\rho(g)(s) = {}^t\!g\, s\, g$ vérifie $\rho(g\, h) = \rho(h)\, \rho(g)$; l'image $\rho(G)$ est un sous-groupe compact de $\mathrm{GL}(\mathrm{S}_n)$. Notre problème est de trouver un point fixe pour cette action de G, appartenant au sous-ensemble $\mathrm{SDP}_n \subset \mathrm{S}_n$ des matrices symétriques définies positives. Le sous-ensemble SDP_n est convexe et stable par $\rho(G)$ (pour tout $g \in G$,

$\rho(g)(\mathrm{SDP}_n) \subset \mathrm{SDP}_n$). La méthode la plus courante pour fabriquer un point fixe est de partir du produit scalaire usuel (de matrice I_n) et de prendre « la moyenne » de son orbite $\rho(G)\, I_n = \{{}^t\!g\, g\}$ pour $g \in G$. C'est facile si G est fini, et pour un sous-groupe compact infini on utilise sa mesure de Haar (voir les références citées). Nous allons procéder différemment.

La première étape est de fabriquer un sous-ensemble convexe compact K de SDP_n, stable par l'action de G. L'image de G par l'application continue $\sigma : g \mapsto {}^t\!g\, g$ est un compact contenu dans SDP_n, stable par $\rho(G)$: on a $\rho(g)(\sigma(h)) = \sigma(hg)$ (en fait, $\sigma(G)$ est l'orbite de I_n par l'action de G). Soit K l'enveloppe convexe de $\sigma(G)$. Alors K est compact (fait 2 ci-dessus), encore contenu dans SDP_n (car SDP_n est convexe) et stable par $\rho(G)$ (fait 1 ci-dessus).

La deuxième étape est d'appliquer (avec $E = \mathrm{S}_n$ et $H = \rho(G)$) le résultat suivant qui est une version pour un espace vectoriel E de dimension finie d'un théorème de Kakutani.

Lemme. *Soit H un sous-groupe compact de* $\mathrm{GL}(E)$*, K un compact convexe non vide de E stable par H. Alors H a un point fixe dans K.*

On obtient alors un $s \in K \subset \mathrm{SDP}_n$ fixe par $\rho(G)$, ce qu'on voulait.

Il reste à démontrer le lemme. On fixe une norme euclidienne $\|\cdot\|_0$ sur E, et on définit $\|x\| = \max\{\|h(x)\|_0 \ ;\ h \in H\}$ (bien défini car H est compact et que $h \mapsto h(x)$ est continue). C'est une norme sur E, clairement invariante par H, et qui possède une propriété de stricte convexité : vérifions que si $\|x\| = \|y\| = c > 0$ avec $x \neq y$, alors $\left\|\dfrac{x+y}{2}\right\| < c$. Soit $h \in H$ tel que $\left\|\dfrac{x+y}{2}\right\| = \left\|h\left(\dfrac{x+y}{2}\right)\right\|_0$. La règle du parallélogramme pour la norme euclidienne $\|\cdot\|_0$ nous donne

$$\begin{aligned}
\left\|\frac{x+y}{2}\right\|^2 &= \frac{1}{4}\,\|h(x)+h(y)\|_0^2 = \frac{1}{2}\,\left(\|h(x)\|_0^2 + \|h(y)\|_0^2\right) - \frac{1}{4}\,\|h(x)-h(y)\|_0^2 \\
&\leq c^2 - \frac{1}{4}\,\|h(x)-h(y)\|_0^2 < c^2\ .
\end{aligned}$$

Choisissons alors $s \in K$ avec $\|s\|$ minimum ; on peut le faire puisque K est compact. Ce s est unique (clair si $\|s\| = 0$, et conséquence de la propriété de stricte convexité que nous venons de démontrer sinon). Donc, puisque K est stable par H et que $\|\cdot\|$ est invariant par H, s est un point fixe de H.