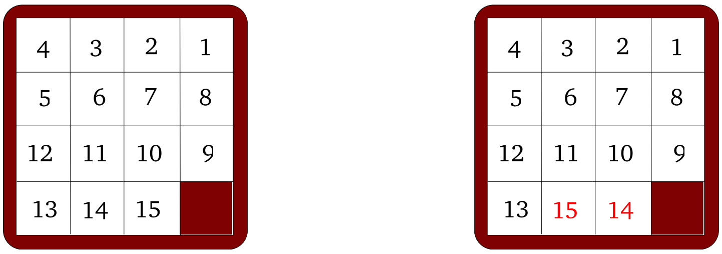
Jeu de taquin et générateurs du groupe alterné

Michel Coste
Université de Rennes 1*

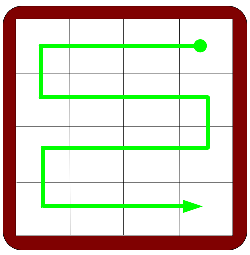
révisé le 5 septembre 2008

Vous connaissez sans doute le jeu de taquin, constitué d'un cadre de 4×4 cases, contenant 15 plaques et un trou qui permet de déplacer les plaques en en glissant une à la place du trou. Numérotons les plaques dans la position de départ du taquin de manière non standard, comme on le voit à gauche sur le dessin suivant.



La question est : quelles sont les positions du jeu de taquin que l'on peut obtenir par des mouvements autorisés (sans démontage et remontage) à partir de la position initiale ? Une sous-question, posée par Sam Loyd il y a plus d'un siècle, est restée célèbre dans l'histoire des casse-têtes mathématiques : peut-on arriver à la position où seules les plaques numérotées 14 et 15 ont échangé leurs places (voir à droite sur le dessin ci-dessus) ?

À toute position du jeu de taquin on peut associer une permutation de $\{1, 2, \ldots, 15\}$ obtenu en lisant les numéros suivant le parcours fléché (sans tenir compte du trou).



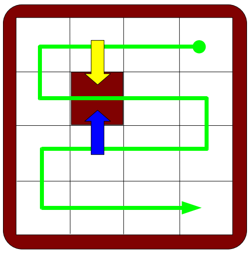
*remarques et questions bienvenues à `michel.coste@univ-rennes1.fr`

La raison du choix du numérotage initial est bien sûr qu'il correspond par ce codage à la permutation identité. Si deux positions donnent la même permutation, on peut passer de l'une à l'autre par un mouvement autorisé du taquin (qui consiste par exemple à faire bouger le trou le long du parcours fléché). La question se formalise maintenant de la manière suivante : quelles sont les permutations réalisables par les mouvements autorisés du jeu de taquin ? La réponse est facile à formuler :

Théorème 1 *Les permutations réalisables sur le taquin sont exactement les permutations paires.*

Ceci apporte bien entendu une réponse négative à la question de Sam Loyd : on ne peut pas réaliser une transposition.

L'implication de l'équivalence qui permet de donner une réponse négative au problème de Sam Loyd est assez facile à voir : une inspection rapide nous montre qu'un mouvement élémentaire du taquin correspond à la composition de la permutation avec un cycle de longueur impaire (3, 5 ou 7 ; sur le dessin ci-dessous, le mouvement jaune correspond à un 3 cyle et le mouvement bleu à un 5-cycle). On ne peut donc réaliser sur le taquin que des permutations paires.

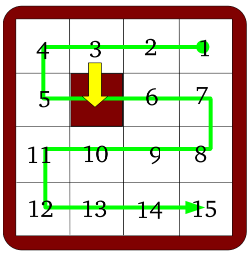


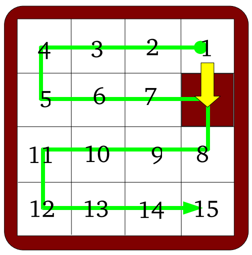
Il reste à voir que toute permutation paire est réalisable. Nous allons démontrer un lemme sur le jeu de taquin.

Lemme 2 *Si σ est une permutation réalisable sur le jeu de taquin, et i un entier entre* 1 *et* 13*, alors $\sigma \circ (i, i+1, i+2)$ est réalisable sur le taquin. (Bien entendu $(i, i+1, i+2)$ désigne le cycle de longueur* 3*)*

La démonstration du lemme résulte d'une suite d'observations.

1. On voit comment obtenir le cycle $(3, 4, 5)$ (voir ci-dessous à gauche).





2. On voit comment obtenir le cycle $(1, 2, 3, 4, 5, 6, 7)$ (voir ci-dessus à droite), et donc toutes ses puissances.
3. En conjugant $(3, 4, 5)$ par des puissances de $(1, 2, 3, 4, 5, 6, 7)$, on obtient $(1, 2, 3), (2, 3, 4), \ldots, (5, 6, 7)$.

4. En se plaçant au coude suivant du parcours fléché, on obtient de la même façon $(5,6,7),(6,7,8),\dots,(9,10,11)$ et en se plaçant au troisième coude $(9,10,11),(10,11,12),\dots,(13,14,15)$

Et voici le résultat qui permet de conclure, et de raconter cette histoire dans la leçon « Exemples de parties génératrices d'un groupe » :

Théorème 3 *Les 3-cycles $(i, i+1, i+2)$ pour $1 \leq i \leq n-2$ engendrent le groupe alterné $\mathcal{A}_n$.*

On sait, et on trouve partout, que les 3-cycles engendrent $\mathcal{A}_n$. Il suffit de montrer que n'importe quel 3-cycle (j,k,ℓ) est dans le sous-groupe engendré par les $(i,i+1,i+2)$, et on va le faire par récurrence sur $d = \max(j,k,\ell) - \min(j,k,\ell)$. Remarquons qu'on peut supposer $j = \min(j,k,\ell)$, et qu'il suffit de considérer le cas $j < k < \ell$ car $(j,k,\ell)^2 = (j,\ell,k)$.

La récurrence démarre bien avec $d = 2$: on a les $(i, i+1, i+2)$.

Soit (j,k,ℓ) avec $j < k < \ell$ et $\ell - j = d > 2$, et supposons que tout 3-cycle avec $\max - \min < d$ est produit de $(i,i+1,i+2)$. Si $k - j > 1$ on a

$$(j,k,\ell) = (j+1,k,\ell) \circ (j,j+1,k) \circ (j+1,\ell,k) \ ,$$

où les 3-cycles à droite ont tous $\max - \min < d$. C'est gagné. Sinon, on doit avoir $\ell - k > 1$, et on gagne encore avec

$$(j,k,\ell) = (j,k+1,k) \circ (k,k+1,\ell) \circ (j,k,k+1) \ .$$

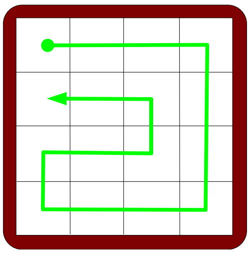
Questions :

1. On trouve quelquefois, à propos du problème du taquin, une autre méthode qui consiste à considérer la signature de la permutation de $\{1,2,\dots,16\}$ obtenue sur le taquin (en affectant le numéro 16 à la case vide), multiplié par $(-1)^{i+j}$ où i est le numéro de ligne et j le numéro de colonne où se trouve la case vide. Pouvez-vous faire le rapport avec ce qui vient d'être fait ?
2. Que pensez vous du taquin sur $m \times n$ cases, toujours avec une case vide ?
3. On trouve, chez Tauvel par exemple, l'ensemble générateur formé des $(1,2,i)$ avec $i = 3,\dots,n$ pour le groupe $\mathcal{A}_n$. Peut-on engendre $\mathcal{A}_n$ avec moins de $n-2$ 3-cycles ?

Remarques ajoutées après consultation du chapitre « Le jeu de taquin » des Récréations mathématiques d'Édouard Lucas [Luc].

On peut tirer de ce texte une démonstration très directe du théorème 3 ci-dessus. Cette démonstration est analogue à celle qui prouve que les transpositions $(i,i+1)$ (appelons-les « sauts-de-mouton ») engendrent le groupe des permutations en remarquant qu'on peut à partir de la suite $(1,2,\dots,n)$, amener par une succession de sauts-de-mouton n'importe quel nombre en première position, puis n'importe quel autre en deuxième etc.. On peut répéter le même argument en remplaçant les sauts-de-mouton par des cycles portant sur trois positions successives. Cette fois-ci, on arrive ainsi à placer les nombres qu'on veut sur les $n-2$ premières positions, ce qui permet de réaliser n'importe quelle permutation paire. Remarquez au passage que ceci prouve que les 3-cyles engendrent le groupe alterné.

Par ailleurs, Lucas utilise un autre chemin sur la grille du taquin :



En codant les positions du taquin suivant ce chemin, on voit immédiatement que les mouvements du taquin permettent d'obtenir le 15-cycle $(1, 2, 3, \ldots, 15)$ et un 3-cycle sur des entiers successifs (par exemple $(9, 10, 11)$), et donc pas conjugaison tous les trois cycles sur des entiers successifs.

Références

[Luc] É. Lucas, Récréations mathématiques, vol. 1, Gauthier-Villars 1882. Nouveau tirage, Blanchard 1960.