# Une remarque sur la transposée d'une matrice

Soit $k$ un corps, $n \geq 1$ un entier, $E$ un $k$-espace vectoriel de dimension $n$. C'est un fait classique que toute matrice $M \in \mathrm{M}_n(k)$ est semblable à sa transposée. Dans cette note, nous tentons d'expliquer ce fait et nous le démontrons.

Il n'est pas évident de comprendre ce que cet énoncé matriciel signifie pour les endomorphismes. En effet, l'énoncé analogue mène à considérer un endomorphisme $f : E \to E$ et son dual $f^* : E^* \to E^*$. Comme $f$ et $f^*$ n'agissent pas sur les mêmes espaces, on ne peut les conjuguer l'un en l'autre... Sauf à utiliser, pour conjuguer, un isomorphisme $g : E \xrightarrow{\sim} E^*$ de sorte qu'on ait $f^* = gfg^{-1}$. On a alors le diagramme commutatif :

$$\begin{tikzcd} E \arrow[r, "f"] \arrow[d, "g"'] & E \arrow[d, "g"] \\ E^* \arrow[r, "f^*"] & E^* \end{tikzcd}$$

Dans ce cas, l'isomorphisme $g$ ne représente pas un changement de base dans $E$. Plutôt, il faut penser à $g$ comme à une forme bilinéaire non dégénérée sur $E$, en se souvenant que formes bilinéaires $b : E \times E \to k$ et morphismes $g : E \to E^*$ se correspondent via $g(x) = b(x, \cdot)$ et $b(x,y) = (g(x))(y)$. En termes de la forme bilinéaire non dégénérée $b$ associée à $g$, la relation $f^* = gfg^{-1}$ fournit :

$$\text{pour tous } x, y \text{ dans } E,\ b(f(x), y) = b(x, f(y)) \ .$$

Dit autrement, $f$ est autoadjoint pour $b$. Il y a même un petit bonus, car il se trouve que non seulement toute matrice $M$ est semblable à sa transposée, mais en plus, la matrice de passage peut être choisie symétrique. Nous pouvons finalement exprimer ceci sous la forme d'un bel énoncé et le démontrer :

**Proposition** *Soit $f$ un endomorphisme de $E$. Alors, il existe une forme bilinéaire symétrique non dégénérée sur $E$ telle que $f$ est autoadjoint pour cette forme.*

**Démonstration :** bien que l'on ait fait des efforts pour obtenir un énoncé sur les endomorphismes, la démonstration est matricielle. Vérifions qu'on a bien traduit notre problème initial. Dire que $f$ est autoadjoint pour une forme bilinéaire symétrique non dégénérée $\varphi$ signifie, si l'on fixe une base de $E$ et que l'on désigne par $M$ la matrice de $f$ et par $P$ la matrice de $\varphi$, qu'on a

$$^t(MX)PY = {}^tXPMY$$

pour tous vecteurs colonnes $X, Y$. Ceci signifie que $PM = {}^tMP$, donc $M$ et sa transposée sont semblables et conjuguées par une matrice symétrique. Il s'agit donc de trouver une matrice inversible et symétrique $P$ satisfaisant cette égalité. Commençons par le cas où $M$ est une matrice compagnon :

$$M = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & b_1 \\ 1 & \ddots & \vdots & b_2 \\ & \ddots & 0 & \vdots \\ 0 & & 1 & b_n \end{pmatrix}$$

c'est-à-dire $m_{i,j} = \delta_{i\geq 2}\delta_{j\leq n-1}\delta_{i,j+1} + \delta_{j,n}b_i$. L'égalité des coefficients $(PM)_{i,j} = ({}^tMP)_{i,j}$ donne

$$\delta_{j\leq n-1}p_{i,j+1} + \delta_{j,n}\sum_{k=1}^{n} p_{i,k}b_k = \delta_{i\leq n-1}p_{i+1,j} + \delta_{i,n}\sum_{k=1}^{n} p_{k,j}b_k\ .$$

On en déduit que $p_{i,j+1} = p_{i+1,j}$ à chaque fois que ceci a un sens, c'est-à-dire qu'il existe des scalaires $q_2,\dots,q_{2n}$ tels que $p_{i,j} = q_{i+j}$ pour tous $i,j$, et que $q_{n+i+1} = \sum_{k=1}^{n} q_{k+i}b_k$ pour $1 \leq i \leq n-1$. On voit donc que la donnée de $q_2,\dots,q_{n+1}$ quelconques détermine $P$, et que toutes les matrices $P$ ainsi obtenues sont symétriques. Enfin il est clair que l'une de ces matrices est inversible, car si l'on prend $q_2 = \cdots = q_n = 0$ et $q_{n+1} = 1$, on trouve une matrice de déterminant $\pm 1$.

Dans le cas général, $M = A^{-1}NA$ où $N$ est diagonale par blocs avec pour blocs des matrices compagnon $N_i$ (forme normale de Frobenius). Pour chaque $i$ choisissons $Q_i$ inversible symétrique telle $Q_iN_i = {}^tN_iQ_i$. Soit $Q$ la matrice diagonale par blocs de blocs $Q_i$, on vérifie que $P = {}^tAQA$ est inversible symétrique et que $PM = {}^tMP$. $\square$

N.B. On peut s'en sortir aussi avec la réduction de Jordan, mais il faut alors passer par une clôture algébrique de $k$ et ensuite faire quelques contorsions pour justifier que le résultat vaut tout de même sur $k$. C'est donc un exemple où la réduction de Frobenius est plus efficace, car, contrairement à la réduction de Jordan, elle ne nécessite aucune hypothèse sur le corps de base.

**Remarque** Si $k = \mathbb{R}$, il n'existe pas en général de produit scalaire euclidien pour lequel $f$ est autoadjoint (et idem si $k = \mathbb{C}$, pas de produit scalaire hermitien). Dit autrement, la forme bilinéaire symétrique non dégénérée fournie par le résultat ci-dessus ne peut pas toujours être choisie positive. Il suffit de prendre pour contre-exemple un endomorphisme non diagonalisable, puisque tout endomorphisme autoadjoint pour un produit scalaire (ou produit hermitien) est diagonalisable. Par exemple soient $E = \mathbb{R}^2$ et l'endomorphisme (semis-simple et non diagonalisable) de matrice

$$I = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

(notez que $I^2 = -1$). Les matrices $P$ vérifiant $PI = {}^tIP$ sont les matrices de la forme

$$P = \begin{pmatrix} a & b \\ b & -a \end{pmatrix}\ .$$

La forme correspondante est non dégénérée ssi $a^2 + b^2 \neq 0$, et on vérifie que sa signature est $(1,-1)$ pour toute valeur de $(a,b)$. Donc la forme associée n'est jamais un produit scalaire.