Université de Rennes 1
Préparation à l'agrégation
de mathématiques
Auteur du document :

M. Coste

Valeurs de la fonction ζ de Riemann aux entiers strictement positifs pairs

Michel Coste

Version révisée octobre 2002

On peut utiliser ce qui suit pour un développement illustrant la leçon « Racines d'un polynôme. Relations coefficients-racines » ; en effet, on utilise le fait que deux polynômes de même degré qui ont même coefficient dominant et mêmes racines sont égaux et on applique les formules de Newton. Il est recommandé de ne pas passer trop de temps sur les calculs (de majoration par exemple), mais par contre de démontrer les formules de Newton.

Il s'agit de montrer, par des moyens tout à fait élémentaires, le résultat fameux suivant : Soit p un entier strictement positif. Alors

$$\zeta(2p) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^{2p}}$$

est un multiple rationnel de π^{2p}. Il s'agit d'une élaboration d'un exercice de [G] (Problème 3 page 267). Il se trouve aussi dans [TAD] (P 11.6.3 page 386) à propos des relations entre coefficients et racines. Il semble que la méthode pour calculer $\sum_{n=1}^{\infty} 1/k^2$ donnée dans ces exercices ait été publiée en 1970 par Finn Holme.

La première étape consiste à montrer l'identité

$$\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{2n+1}{2k+1} X^{n-k} = (2n+1) \prod_{k=1}^{n} \left(X - \cot^2 \frac{k\pi}{2n+1} \right) .$$

C'est une égalité entre deux polynômes de degré n. On vérifie qu'ils ont même coefficient dominant $2n+1$, et mêmes racines $\cot^2 x_k$ où $x_k = \frac{k\pi}{2n+1}$ pour $k = 1, \ldots, n$. En effet, notons P_n le polynôme de gauche. On voit que $P_n(\cot^2(\theta))$ est la partie imaginaire de $(\exp(i\theta))^{2n+1}$ divisée par $\sin^{2n+1}\theta$, c.-à-d. $P_n(\cot^2(\theta)) = \dfrac{\sin(2n+1)\theta}{\sin^{2n+1}\theta}$.

La deuxième étape consiste à vérifier l'inégalité

$$0 < \frac{1}{x^2} - \cot^2 x < 1 \quad \text{pour } 0 < x < \frac{\pi}{2} .$$

C'est une conséquence immédiate de $\sin x < x < \tan x$ (pour $0 < x < \frac{\pi}{2}$). En utilisant $a^p - b^p = (a-b) \sum_{i=0}^{p-1} a^i b^{p-1-i}$, on en déduit, pour p entier > 0,

$$0 < \frac{1}{x^{2p}} - \cot^{2p} x < \frac{p}{x^{2(p-1)}} \quad \text{pour } 0 < x < \frac{\pi}{2} .$$

On somme ces inégalités pour tous les x_k avec $k = 1, \dots, n$ et on trouve

$$0 < \left(\frac{2n+1}{\pi}\right)^{2p} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^{2p}} - \sum_{k=1}^{n} \cot^{2p} x_k < p \left(\frac{2n+1}{\pi}\right)^{2(p-1)} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^{2(p-1)}} \ . \quad (*)$$

Notons $S_p(n) = \sum_{k=1}^{n} \cot^{2p} x_k$. C'est la somme des puissances p-èmes des racines du polynôme P_n. Un petit raisonnement sur les relations coefficients-racines permet de voir que $S_p(n)$ est un polynôme à coefficients rationnels en n, de degré au plus $2p$.

On divise par n^{2p} l'encadrement $(*)$, et on fait tendre n vers l'infini. Le terme de droite dans l'encadrement tend vers 0 (justifier cette affirmation, y compris pour $p = 1$). On obtient que $\zeta(2p)$ vaut $\left(\frac{\pi}{2}\right)^{2p}$ fois le coefficient de n^{2p} dans $S_p(n)$. Ceci démontre le résultat annoncé.

Revenons sur l'affirmation que $S_p(n)$ est un polynôme à coefficients rationnels en n, de degré au plus $2p$. On remarque que les polynômes symétriques élémentaires σ_k des racines de P_n sont des polynômes à coefficients rationnels en n de degré $2k$. En effet,

$$\sigma_k = \frac{1}{2n+1} \binom{2n+1}{2k+1} = \frac{2n(2n-1)\cdots(2n-2k+1)}{(2k+1)!} \ .$$

Ensuite on peut utiliser les formules de Newton permettant d'exprimer les $S_p(n)$ en fonction des σ_k (cf [Go], proposition 103 page 160) :

$$S_p - \sigma_1 S_{p-1} + \cdots + (-1)^{p-1} \sigma_{p-1} S_1 + (-1)^p p \sigma_p = 0 \ .$$

On peut alors raisonner par récurrence sur p.

Si on explicite les calculs pour $p = 1$ et 2, on trouve $\zeta(2) = \frac{\pi^2}{6}$ et $\zeta(4) = \frac{\pi^4}{90}$.

Références

[Go] R. Goblot, *Algèbre comutative*, Masson.

[G] X. Gourdon, *Les maths en tête - Analyse*, Ellipses.

[TAD] Tissier, Acx, Desnoux : *Mathématiques - Prépa MPSI/PCSI*, vol.1, Vuibert.