MINISTÈRE DE L'ÉDUCATION NATIONALE
DE L'ENSEIGNEMENT SUPÉRIEUR ET DE LA RECHERCHE

DIRECTION DES PERSONNELS ENSEIGNANTS

RAPPORT DE JURY DE CONCOURS

AGRÉGATION DE MATHÉMATIQUES

CONCOURS EXTERNE

Session 2004

LES RAPPORTS DES JURYS DES CONCOURS SONT ÉTABLIS SOUS LA RESPONSABILITÉ DES PRÉSIDENTS DE JURY

Composition du jury

Directoire

Moisan Jacques, président	Inspecteur général de l'éducation nationale
Chevallier Jean-Marie, secrétaire général	Maître de conférences
Foulon Patrick, vice-président	Professeur des universités
Lichnewsky Alain, vice-président	Professeur des universités
Marchal Jeannette, vice-présidente	Inspectrice générale de l'éducation nationale
Skandalis Georges, vice-président	Professeur des universités
Boisson François	Professeur de chaire supérieure
Diebolt Jean	Directeur de recherches
Le Dret Hervé	Professeur des universités
Mestre Jean-François	Professeur des universités
Petazzoni Bruno	Professeur de chaire supérieure

Jury

Airault Hélène	Professeure des universités
Albert Luc	Professeur de chaire supérieure
Ango Nze Patrick	Maître de conférences
Apparicio Carine	Professeure agrégée
Barbolosi Dominique	Maître de conférences
Bardet Jean-Marc	Professeur des universités
Becker Marc	Professeur de chaire supérieure
Belabas Karim	Maître de conférences
Bennequin Daniel	Professeur des universités
Bonnefont Claire	Professeure de chaire supérieure
Borel Agnès	Professeure de chaire supérieure
Bougé Luc	Professeur des universités
Boyer Pascal	Maître de conférences
Burban Anne	Professeure de chaire supérieure
Cabane Robert	Professeur de chaire supérieure
Chambert-Loir Antoine	Professeur des universités
Chanet Françoise	Professeure de chaire supérieure
Chevallier Marie-Elisabeth	Professeure de chaire supérieure
Chillès Alain	Professeur de chaire supérieure
Choimet Denis	Professeur agrégé
Comte Myriam	Maître de conférences
Cortella Anne	Maître de conférences
Czarnecki Marc-Olivier	Professeur des universités
Delbecque François	Directeur de recherches
Delezoide Pierre	Professeur de chaire supérieure
Devie Hervé	Professeur de chaire supérieure
Djadli Zindine	Maître de conférences
Duval Yves	Professeur de chaire supérieure

Fayolle Guy	Directeur de recherches
Fernandez Catherine	Professeure agrégée
Frossard - Feaux de Lacroix Emmanuelle	Maître de conférences
Furter Jean-Philippe	Maître de conférences
Gaussier Hervé	Professeur des universités
Gerbeau Jean Frédéric	Chargé de recherches
Goldsztejn Emmanuel	Professeur agrégé
Harinck Pascale	Chargée de recherches
Hijazi Oussama	Professeur des universités
Henniart Guy	Professeur des universités
Hoffmann Marc	Professeur des universités
Koseleff Pierre-Vincent	Maître de conférences
Kourkova Irina	Maître de conférences
Labbé Stéphane	Maître de conférences
Lachand-Robert Thomas	Professeur des universités
Latrémoliére Evelyne	Professeure agrégée
Léonard Christian	Professeur des universités
Lods Veronique	Professeure agrégée
Loubes Jean-Michel	Chargé de recherches
Mahieux Annick	Professeure de chaire supérieure
Maillot Vincent	Chargé de recherches
Meier Isabelle	Professeure de chaire supérieure
Merlevede Castano Florence	Maître de conférences
Mézard Ariane	Maître de conférences
Miclo Laurent	Professeur des universités
Miquel Anne	Professeure agrégée
Mneimné Rached	Maître de conférences
Mons Pascal	Professeur agrégé
Moroianu Andrei	Chargé de recherches
Nivoche Stéphanie	Maître de conférences
Patras Frédéric	Chargé de recherches
Pietrus Alain	Professeur des universités
Prieur Clémentine	Maître de conférences
Prigent Jean-Luc	Maître de conférences
Queffélec Hervé	Professeur des universités
Saada Ellen	Chargée de recherches
Sabot Christophe	Chargé de recherches
Saramito Bernard	Professeur des universités
Sauzin David	Chargé de recherches
Sidaner Sophie	Professeure de chaire supérieure
Sitz-Carmona Nathalie	Professeure de chaire supérieure
Szpirglas Aviva	Professeure des universités
Taieb Franck	Professeur agrégé
Tchou Nicoletta	Maître de conférences
Tilouine Jacques	Professeur des universités
Torossian Charles	Chargé de recherches
Vaugelade Elisabeth	Maître de conférences
Veeravalli Alain	Maître de conférences
Vincent Christiane	Professeure de chaire supérieure

Wagschal Claude	Professeur des universités
Watbled Frédérique	Maître de conférences
Ycart Bernard	Professeur des universités
Yebbou Johan	Professeur de chaire supérieure
Yger Alain	Professeur des universités

Déroulement du concours

Déroulement de la session 2004

Les épreuves écrites se sont déroulées selon le calendrier suivant :

- Épreuve de mathématiques générales : lundi 5 avril 2004
- Épreuve d'analyse et probabilités : jeudi 8 avril 2004

La liste d'admissibilité a été publiée le lundi 7 juin 2004.

L'oral s'est déroulé du 23 juin au 19 juillet au lycée Marcelin-Berthelot de Saint-Maur-des-Fossés. La liste d'admission a été publiée le mardi 20 juillet 2004.

L'agrégation externe de mathématiques

Le nom officiel, « concours externe de recrutement de professeurs agrégés stagiaires », montre clairement qu'il s'agit d'un concours de recrutement de professeurs agrégés destinés, selon leur statut, à l'enseignement secondaire (lycées d'enseignement général et technologique et, exceptionnellement, collège) ou à l'enseignement supérieur (universités, instituts universitaires de technologie, grandes Écoles, classes préparatoires aux grandes Écoles, sections de techniciens supérieurs). À l'issue du concours, les candidats admis sont normalement placés comme stagiaires. Les différentes possibilités de stage (stage en formation à l'IUFM, stage en situation dans un établissement secondaire, stage en CPGE, stage comme ATER, etc.) sont détaillées dans la note de service n°2004-078 du 7 mai 2004.

Des reports de stage peuvent être accordés par la DPE[1] pour permettre aux lauréats d'effectuer des études doctorales ou des travaux de recherche dans un établissement ou organisme public français[2] ; les élèves des Écoles Normales Supérieures en bénéficient automatiquement pour terminer leur période de scolarité.

Le programme, la nature des épreuves écrites et orales, font l'objet de publications au Bulletin Officiel du ministère de l'éducation nationale (B.O.), et leur actualisation peut être consultée sous forme électronique sur le site de la DPE, à l'adresse

`http://www.education.gouv.fr/siac/siac2/default.htm`

ou sur le site de l'agrégation externe de mathématiques, à l'adresse

`http://www.agreg.org`,

où se trouvent aussi tous les renseignements pratiques concernant les sessions à venir.

---

[1] Direction des personnels enseignants (enseignements de second degré) du ministère de l'éducation nationale de l'enseignement supérieur et de la recherche.

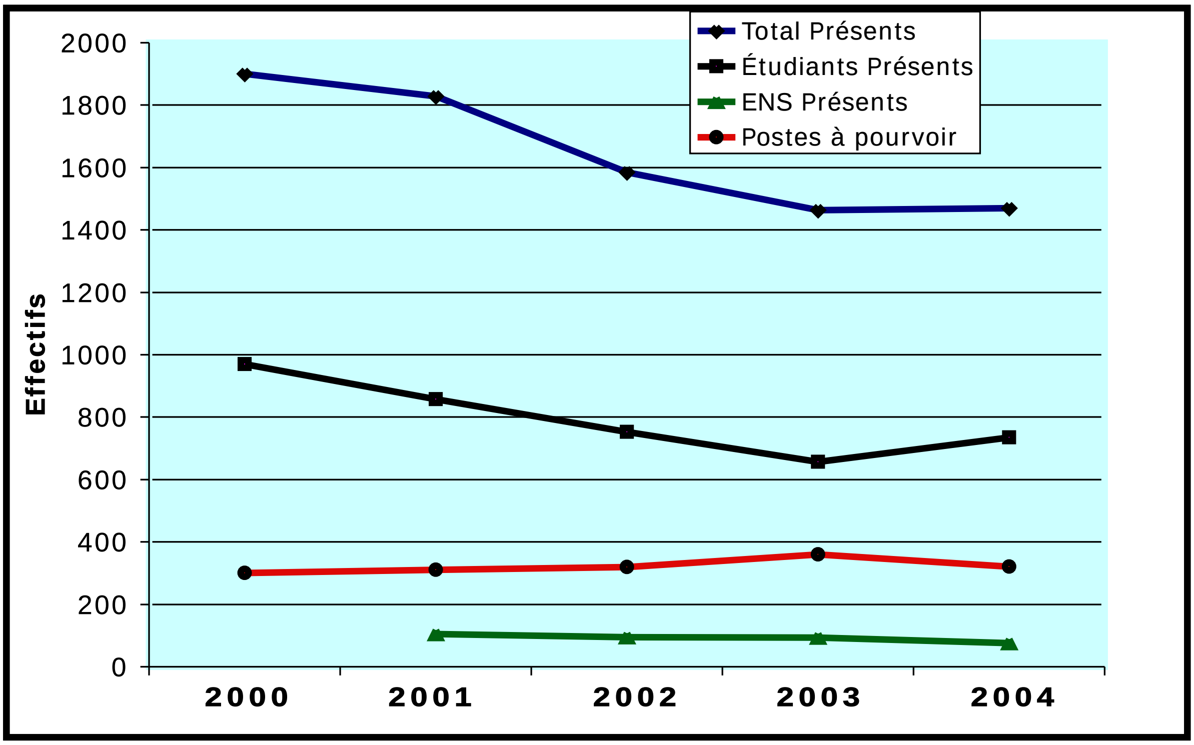
[2] La DPE demande une attestation de poursuite de recherches, ou à défaut une autorisation à s'inscrire dans une formation de troisième cycle universitaire. Les candidats doivent se munir d'une telle attestation et la fournir pendant l'oral.

Commentaires généraux sur la session 2004

Malgré une diminution sensible du nombre de postes au concours (de 360 postes en 2003 à 321 postes en 2004, soit une diminution de plus de 10%), le nombre d'inscrits et surtout le nombre de présents aux deux épreuves d'écrit a augmenté, pour la première fois depuis le concours 2000. Une analyse plus fine montre que cette augmentation est surtout due à une augmentation du nombre de candidats étudiants (hors ENS), alors que le nombre de candidats normaliens est en diminution. Cette évolution par rapport à 2003 est en rupture avec l'évolution préoccupante des années précédentes qui a vu une décroissance régulière du nombre de candidats étudiants. Si cette nouvelle tendance se confirmait, elle constituerait un encouragement à la politique de développement de la qualité des préparations universitaires et mettrait un terme à une décroissance dramatique du nombre de candidats étudiants, qui constituent la source principale du recrutement des professeurs agrégés (63% des reçus au concours 2004).

Année	**Total Inscrits**	**Total Présents**	Étudiants Présents	ENS Présents	Autres Présents	Postes à pourvoir	**Présents par poste**
2000	**2875**	**1900**	970			300	**6,3**
2001	**2663**	**1828**	857	105	866	310	**5,9**
2002	**2343**	**1584**	753	95	736	320	**5,0**
2003	**2217**	**1463**	657	93	713	360	**4,1**
2004	**2333**	**1470**	735	76	659	321	**4,6**

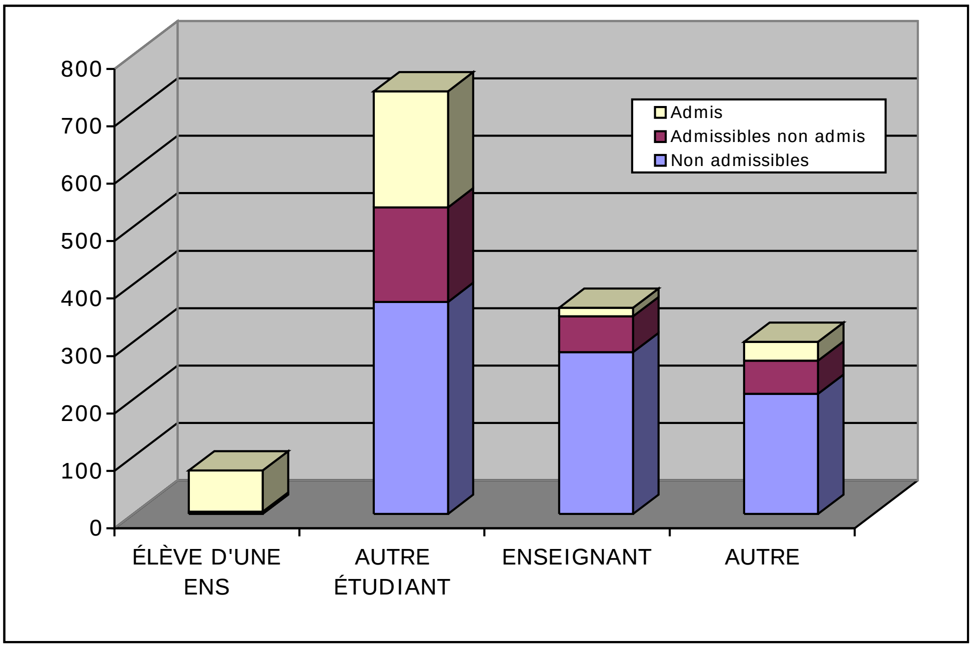
Évolution du nombre de présents aux deux épreuves d'écrit



À l'issue de la délibération d'écrit, 609 candidats ont été déclarés admissibles ; le premier admissible avait une moyenne de 20/20 et le dernier une moyenne de 6,875/20. Finalement, à l'issue des épreuves orales, les 321 postes offerts au concours ont été pourvus ; le premier admis a une moyenne de 18,5/20, le dernier admis une moyenne de 8,45/20. On trouvera dans les pages qui suivent différents tableaux et graphiques constituant le bilan statistique du concours selon différents critères (géographie, genre, catégorie professionnelle). Dans ces tableaux, tous les pourcentages sont calculés par rapport aux présents.

CATÉGORIES SIMPLIFIÉES	Inscrits	Présents	Admissibles	Admis	% admissibles	% admis
ÉLÈVE D'UNE ENS	79	76	75	72	98,7	94,7
AUTRE ÉTUDIANT	893	735	366	201	49,8	27,3
ENSEIGNANT	738	359	77	15	21,4	4,2
AUTRE	623	300	91	33	30,3	11
TOTAL	**2333**	**1470**	**609**	**321**	**41,4**	**21,8**

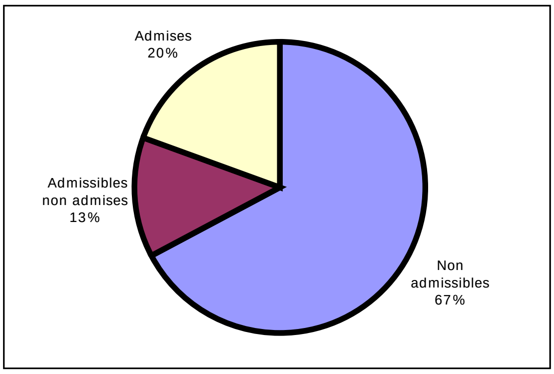
Résultat du concours par catégories



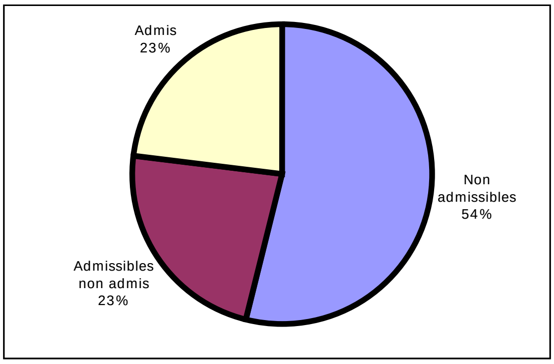
Les résultats par catégories simplifiées confirment que le concours de l'agrégation externe de mathématiques est, comme c'est sa fonction, une concours de recrutement de nouveaux enseignants. La catégorie cumulée des étudiants (ENS et hors ENS) constitue en effet 85% de l'effectif des admis.

GENRE	Inscrits	Présents	Admissibles	Admis	% Admissibles	% Admis
FEMME	780	517	170	101	32,9	19,5
HOMME	1554	953	439	220	46,1	23,1
TOTAL	2334	1470	609	321	41,4	21,8

Résultat du concours par genres



Femmes



Hommes

CATÉGORIES	Inscrits	Présents	Admissibles	Admis	% admissibles	% admis
ÉLÈVE IUFM 1re ANNÉE	186	134	10	0	7,5	0
ÉLÈVE D'UNE ENS	79	76	75	72	98,7	94,7
ÉTUDIANT	707	601	356	201	59,2	33,4
SALARIÉ SECTEUR PRIVÉ	127	41	9	1	22	2,4
SANS EMPLOI	235	111	41	16	36,9	14,4
ENSEIGNANT DU SUPÉRIEUR	33	18	9	3	50	16,7
AGRÉGÉ	7	3	2	0	66,7	0
CERTIFIÉ	498	255	56	11	22	4,3
PLP	25	12	2	0	16,7	0
AUTRE ENSEIGNANT 2nd DEGRÉ	168	67	7	1	10,4	1,5
ENSEIGNANT 1er DEGRÉ	7	4	1	0	25	0
MILITAIRE	3	2	2	2	100	100
AUTRE FONCTIONNAIRE	15	7	2	3	28,6	42,9
MI-SE	14	7	1	1	14,3	14,3
AUTRE	229	132	36	10	27,3	7,6
TOTAL	**2333**	**1470**	**609**	**321**	**41,4**	**21,8**

Résultat du concours par catégories professionnelles

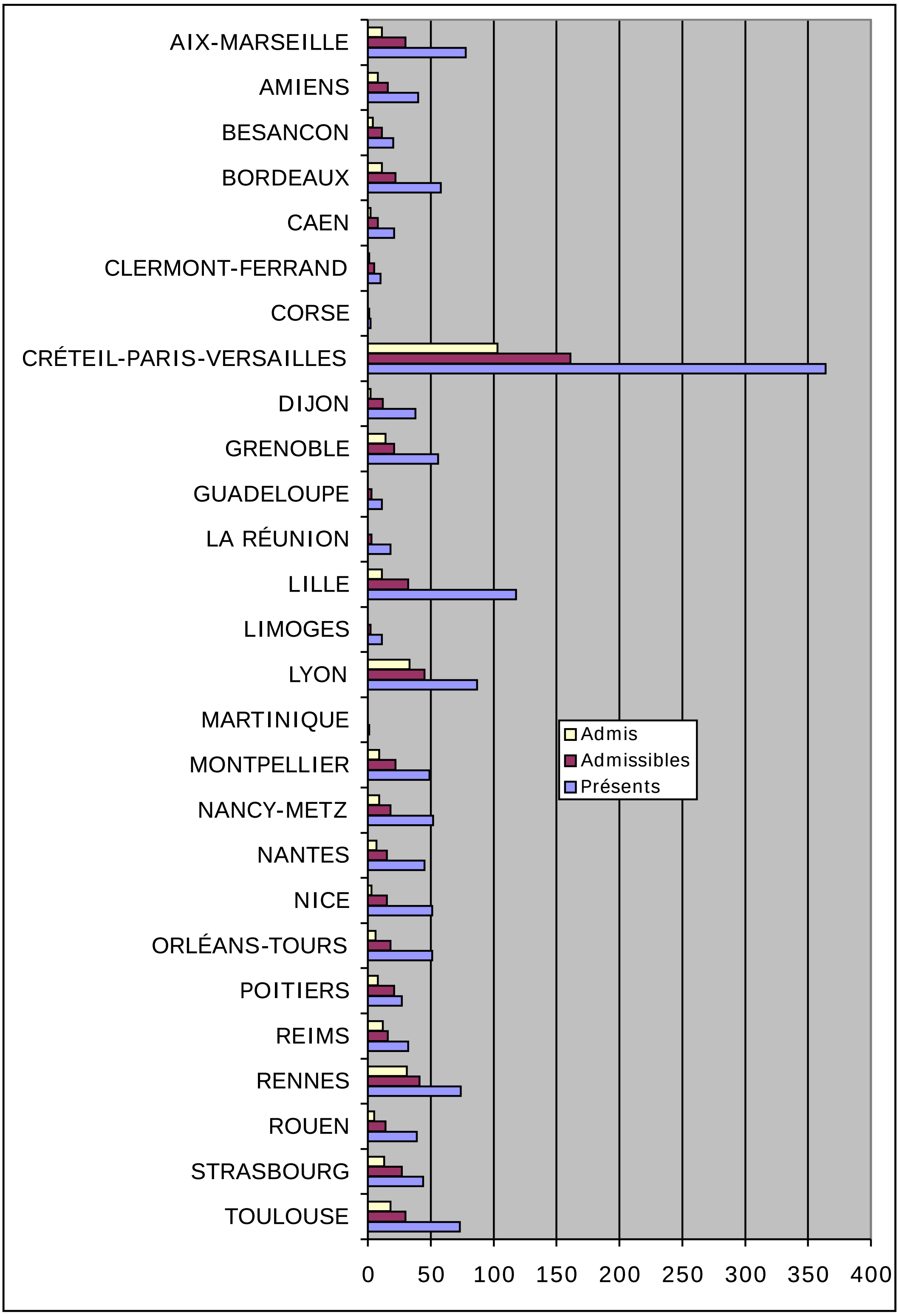
Les catégories professionnelles listées ci-dessus correspondent aux déclarations des candidats lors de l'inscription : elles ne font l'objet d'aucune vérification et sont donc approximatives.

ACADÉMIES	Inscrits	Présents	Admissibles	Admis
AIX-MARSEILLE	118	78	30	11
AMIENS	65	40	16	8
BESANCON	31	20	11	4
BORDEAUX	80	58	22	11
CAEN	37	21	8	2
CLERMONT-FERRAND	19	10	5	1
CORSE	6	2	1	0
DIJON	60	38	12	2
GRENOBLE	90	56	21	14
GUADELOUPE	20	11	3	0
LA RÉUNION	28	18	3	0
LILLE	184	118	32	11
LIMOGES	18	11	2	0
LYON	130	87	45	33
MARTINIQUE	15	1	0	0
MONTPELLIER	95	49	22	9
NANCY-METZ	82	52	18	9
NANTES	70	45	15	7
NICE	85	51	15	3
ORLÉANS-TOURS	70	51	18	6
POITIERS	46	27	21	8
REIMS	49	32	16	12
RENNES	102	74	41	31
ROUEN	62	39	14	5
STRASBOURG	57	44	27	13
TOULOUSE	111	73	30	18
CRÉTEIL-PARIS-VERSAILLES	603	364	161	103
TOTAL	**2333**	**1470**	**609**	**321**

Résultat du concours par académies

ACADÉMIES DES ENS	Inscrits	Présents	Admissibles	Admis
C-P-V hors ENS	561	325	123	67
LYON hors ENS	114	71	29	18
RENNES hors ENS	83	55	22	12

Représentation des résultats par académies (y compris ENS)



Épreuve écrite de mathématiques générales

Préambule

Le but de ce problème est d'étudier le nombre de solutions modulo un entier naturel q d'une congruence quadratique matricielle

$$ {}^tXSX \equiv T \pmod q $$

où S et T sont des matrices symétriques données à coefficients entiers, de tailles respectives $m \times m$ et $n \times n$, q est un entier strictement positif et l'inconnue X est une matrice d'entiers de taille $m \times n$, ${}^tX$ désignant sa transposée.

Soit R un anneau commutatif ; dans ce préambule, on note 1_R son élément unité, mais on permet d'écrire 1 dans la rédaction. On note $R^\times$ le groupe des éléments inversibles de R.

Étant donnés deux entiers m et n strictement positifs, on note $M_{m,n}(R)$ l'ensemble des matrices à m lignes et n colonnes à coefficients dans R.

Pour tout entier n strictement positif, on note $[1, n] = \{i \in \mathbb{Z} \,|\, 1 \leqslant i \leqslant n\}$; pour simplifier, on note $M_n(R)$, au lieu de $M_{n,n}(R)$, l'anneau des matrices carrées de taille $n \times n$ à coefficients dans R. Le déterminant d'une matrice carrée X à coefficients dans R est défini par la formule habituelle et noté $\det A$. On rappelle qu'une matrice de $M_n(R)$ est inversible si et seulement si son déterminant est dans l'ensemble $R^\times$ des éléments inversibles de R. On note $GL_n(R)$ le groupe des éléments de $M_n(R)$ de déterminant dans le groupe $R^\times$.

On note 1_n la matrice unité de $M_n(R)$. On note $S_n(R)$ l'ensemble des matrices X de $M_n(R)$ symétriques, c'est-à-dire telles que ${}^tX = X$.

A. Solutions modulo un nombre premier impair

Dans cette partie **A.**, on fixe un nombre premier **impair** p et on considère deux matrices symétriques S et T, avec $S \in M_m(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})$ et $T \in M_n(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})$, de déterminants respectifs s et t non nuls. L'élément de la i-ème ligne et j-ème colonne de S (resp. T) est noté $s_{i,j}$ (resp. $t_{i,j}$).

On introduit l'ensemble $\mathcal{A}_p(S, T) = \left\{X \in M_{m,n}(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}) \;\middle|\; {}^tXSX = T\right\}$ et on note $A_p(S, T)$ son cardinal.

A.I Un cas particulier

Dans cette section **A.I**, on prend $m = 2$ et $n = 1$. Soit s et t deux éléments non nuls de $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$, $T = \begin{pmatrix} t \end{pmatrix}$ et $S = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & s \end{pmatrix}$. La matrice T, de taille 1×1, est identifiée à t ; ainsi $A_p(S, t)$ est le nombre de couples (x, y) dans $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ tels que $x^2 + sy^2 = t$.

1) Supposons que $-s$ soit un carré dans $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$. Calculer $A_p(S, t)$.

2) On suppose dans toute la suite de cette section **A.I** que $-s$ n'est pas un carré dans $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$.

2.a. Montrer que le polynôme X^2+s est irréductible sur $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$. Soit K un corps de rupture. Quel est le cardinal de K ?

2.b. Soit $F : K \to K,\ z \mapsto z^p$. Montrer que F est un automorphisme involutif de corps ($F \circ F = Id_K$) et déterminer ses points fixes.

2.c. Soit α une racine de X^2+s dans K. Montrer que $F(\alpha) = -\alpha$.

3) Soit $N : K^\times \to K^\times,\ z \mapsto z^{p+1}$.

3.a. Montrer que N est un morphisme de groupes d'image contenue dans $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^\times$.

3.b. Déterminer le cardinal du noyau et de l'image de N.

3.c. Calculer $N(x+y\alpha)$ pour $x,\, y \in \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ non tous deux nuls.

4) Calculer $A_p(S,\, t)$.

A.II Préliminaires

Dans cette section **A.II**, *m est un entier strictement positif et V un espace vectoriel de dimension finie m sur le corps $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$.*

1) Soit $b : V \times V \to \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ une forme bilinéaire symétrique sur V.

1.a. Démontrer que si $b(x,x)$ est nul pour tout x dans V, alors la forme bilinéaire b est nulle.

1.b. Démontrer que V possède une base $(e_1,\ldots,e_m)$ orthogonale pour b, c'est-à-dire telle que pour tous i et j distincts dans $[1,m]$, $b(e_i,e_j)=0$.

1.c. En déduire qu'il existe une matrice diagonale $D \in M_m(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})$ et une matrice inversible $P \in GL_m(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})$ telles que $S = {}^tPDP$.

2) Dans cette question **2**, on prend $V = M_{m,1}(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})$ et on considère la forme bilinéaire b définie pour X et Y dans V par $b(X,Y) = {}^tXSY$.

Montrer que pour tout n entier strictement positif et tout T élément de $S_n(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})$, $A_p(S,T)$ est le nombre de n-uplets $(v_1,\ldots,v_n)$ d'éléments de V vérifiant $b(v_i,v_j)=t_{i,j}$ pour tous i et j dans $[1,n]$.

3) Vérifier que pour toutes matrices P de $GL_m(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})$ et Q de $GL_n(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})$, on a

$$A_p(S,T) = A_p({}^tPSP, {}^tQTQ).$$

4) Soit ϕ la fonction indicatrice d'Euler qui à un entier r strictement positif associe le nombre d'entiers de $[1,r]$ premiers à r.

4.a. Montrer que pour tout entier r strictement positif, $\displaystyle\sum_{d|r} \phi(d) = r$, la somme étant étendue à tous les entiers strictement positifs d diviseurs de r.

4.b. Soit K un corps fini commutatif à q éléments. Démontrer que pour tout entier strictement positif d diviseur de $q-1$, l'ensemble des éléments de $K^\times$ d'ordre divisant d est de cardinal au plus d.

4.c. En déduire que pour tout entier strictement positif d diviseur de $q-1$, $K^\times$ possède 0 ou $\phi(d)$ éléments d'ordre exactement d.

4.d. En déduire que $K^\times$ est cyclique.

A.III Le cas $n = 1$

Soit $n = 1$; on a alors $T = t \in \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ et $2st \neq 0$ où l'on rappelle que $s = \det S$.

Soit $\omega = \exp\left(\dfrac{2\mathrm{i}\pi}{p}\right)$ une racine primitive p-ième de l'unité (on a $\omega \in \mathbb{C}^\times$).

Pour $\alpha \in \mathbb{Z}$, le nombre complexe ω^α ne dépend que de la classe a de α modulo p ; on le note ω^a : on admettra que l'on définit ainsi un morphisme $a \mapsto \omega^a$ du groupe additif $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ dans le groupe multiplicatif $\mathbb{C}^\times$.

Pour $a \in (\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^\times$, on pose $\left(\dfrac{a}{p}\right) = 1$ s'il existe $b \in (\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^\times$ tel que $a = b^2$, et $\left(\dfrac{a}{p}\right) = -1$ sinon. Ces notations seront utilisées dans toute la suite de la partie **A.**

1.a. Montrer qu'il y a dans $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^\times$ autant de carrés que de non carrés et que $a \mapsto \left(\dfrac{a}{p}\right)$ est un morphisme de groupes multiplicatifs $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^\times \to \mathbb{C}^\times$.

1.b. Pour $b \in \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ calculer $\displaystyle\sum_{a\in\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}} \omega^{ab}$.

1.c. Pour $c \in (\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^\times$, on pose $G_c = \displaystyle\sum_{a\in\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}} \omega^{ca^2}$ et $H_c = \displaystyle\sum_{a\in(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^\times} \left(\dfrac{a}{p}\right)\omega^{ca}$.

Démontrer qu'on a $G_c = H_c = \left(\dfrac{c}{p}\right)\cdot G_1$.

Dans ce qui suit, G_1 sera noté G.

2.a. Montrer que $pA_p(S,\, t) = \displaystyle\sum_{a,X} \omega^{a({}^tXSX-t)}$ où a parcourt $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ et X parcourt $M_{m,1}(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})$.

2.b. Soit D une matrice diagonale inversible élément de $M_m(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})$, de termes diagonaux $s_1, \dots, s_m$. Montrer que

$$pA_p(D,\, t) = p^m + \left(\frac{\det D}{p}\right)\cdot G^m \cdot \sum_{a\in(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^\times} \left(\frac{a}{p}\right)^m \omega^{-at}$$

2.c. Montrer que $G^2 = \left(\dfrac{-1}{p}\right)\cdot p$.

Indication : *On pourra appliquer à un cas particulier le résultat démontré dans la question précédente.*

3) Pour $a \in (\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^\times$ et k entier naturel on pose $\varepsilon_k^{(p)}(a) = \left(\dfrac{(-1)^{k/2}a}{p}\right)$ si k est pair et $\varepsilon_k^{(p)}(a) = 0$ sinon.

Cette notation sera utilisée dans la suite du problème.

3.a. Montrer qu'on a l'égalité :

$$A_p(S,\, t) = \begin{cases} p^{m-1}\big(1 - \varepsilon_m^{(p)}(s)\, p^{-m/2}\big) & \text{si } m \text{ est pair} \\ p^{m-1}\big(1 + \varepsilon_{m-1}^{(p)}(st)\, p^{(1-m)/2}\big) & \text{si } m \text{ est impair} \end{cases}$$

3.b. Préciser pour quelles valeurs de m, s et t la quantité $A_p(S,\, t)$ s'annule.

A.IV Le cas n quelconque

Dans cette section, on suppose $m \geqslant n$.

1) Soit $n \geqslant 2$; soit $T \in S_n(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})$ de déterminant $t \in (\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^\times$. Supposons $T = \begin{pmatrix} \delta & 0 \\ 0 & T_1 \end{pmatrix}$ avec $\delta \in (\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^\times$ et $T_1 \in S_{n-1}(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})$ inversible de déterminant t_1.

1.a. Montrer que l'application qui à $X \in \mathcal{A}_p(S,T)$ fait correspondre sa première colonne induit une application γ de $\mathcal{A}_p(S,\, T)$ dans $\mathcal{A}_p(S,\, \delta)$.

1.b. Soit $C_1 \in \mathcal{A}_p(S,\, \delta)$. Montrer qu'il existe une matrice symétrique inversible S_1 dans $M_{m-1}(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})$ dont le déterminant s_1 vérifie $\left(\dfrac{\delta s_1}{p}\right) = \left(\dfrac{s}{p}\right)$, et telle que $\gamma^{-1}(C_1)$ soit de cardinal $A_p(S_1,\, T_1)$.

Indication : *On pourra utiliser l'interprétation de la question 2 du Préliminaire en introduisant l'orthogonal W du vecteur C_1 pour la forme b de matrice S dans la base canonique de $V = M_{m,1}(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})$.*

2.a. En procédant par récurrence sur n, montrer que

$$A_p(S,T) = p^{mn-n(n+1)/2}\psi_{p,m,n}(s,\, t) \prod_{m-n<2k<m} \left(1 - \frac{1}{p^{2k}}\right)$$

où

$$\psi_{p,m,n}(s,\, t) = \left(1 - \varepsilon_m^{(p)}(s)p^{-m/2}\right)\left(1 + \varepsilon_{m-n}^{(p)}(st)p^{(n-m)/2}\right)$$

2.b. À quelles conditions $A_p(S,\, T)$ est-il nul ?

B. Matrices à coefficients dans l'anneau $\mathbb{Z}/q\mathbb{Z}$

Soit q un entier naturel strictement positif ; on note π_q le morphisme canonique d'anneaux $\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/q\mathbb{Z}$ et, si q' est un entier naturel strictement positif multiple de q, $\pi_{q,q'}$ le morphisme canonique d'anneaux $\mathbb{Z}/q'\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/q\mathbb{Z}$. On pourra remarquer l'égalité $\pi_{q,q'} \circ \pi_{q'} = \pi_q$. Si n et m sont des entiers strictement positifs et M un élément de $M_{m,n}(\mathbb{Z})$, on note aussi $\pi_q(M)$ la matrice élément de $M_{m,n}(\mathbb{Z}/q\mathbb{Z})$ dont les coefficients sont les images par π_q des coefficients de M ; on définit de manière analogue $\pi_{q,q'}(M)$ si q' est un multiple de q et si M est élément de $M_{m,n}(\mathbb{Z}/q'\mathbb{Z})$. On considérera comme évidentes les propriétés des applications π_q et $\pi_{q,q'}$ relativement à la somme des matrices, au produit d'une matrice par un scalaire, au produit des matrices, à la transposition des matrices et au déterminant.

On dira que les matrices M_1 et M_2 de même taille et à coefficients dans $\mathbb{Z}$, resp. $\mathbb{Z}/q'\mathbb{Z}$, sont congrues modulo q si $\pi_q(M_1) = \pi_q(M_2)$, resp. si q divise q' et $\pi_{q,q'}(M_1) = \pi_{q,q'}(M_2)$; cette relation sera notée $M_1 \equiv M_2 \pmod q$.

Dans ce qui suit, m et n représentent deux entiers strictement positifs tels que $m \geqslant n$ et S et T deux matrices symétriques, $S \in S_m(\mathbb{Z})$ et $T \in S_n(\mathbb{Z})$, de déterminants respectifs s et t non nuls. Pour tout entier naturel impair q premier avec st, on pose

$$\mathcal{A}_q(S,\,T) = \left\{X \in M_{m,n}(\mathbb{Z}/q\mathbb{Z}) \;\middle|\; {}^tX\pi_q(S)X = \pi_q(T)\right\}$$

et on note $A_q(S,\,T)$ le cardinal de cet ensemble. Pour $a \in \mathbb{Z}$ et p premier impair, on pose $\chi_a(p) = 0$ si p divise a, $\chi_a(p) = 1$ si a est un carré non nul modulo p, et sinon $\chi_a(p) = -1$.

1) Soit q un entier strictement positif quelconque.

1.a. On suppose $q = q_1q_2$, où q_1 et q_2 sont premiers entre eux.
Montrer que l'application $X \mapsto (\pi_{q_1,q}(X), \pi_{q_2,q}(X))$ établit une bijection entre

$$M_{m,n}(\mathbb{Z}/q\mathbb{Z}) \text{ et } M_{m,n}(\mathbb{Z}/q_1\mathbb{Z}) \times M_{m,n}(\mathbb{Z}/q_2\mathbb{Z}).$$

1.b. Montrer que la bijection trouvée au 1.b induit une bijection entre

$$\mathcal{A}_q(S,T) \text{ et } \mathcal{A}_{q_1}(S,T) \times \mathcal{A}_{q_2}(S,T).$$

1.c. On suppose $q = p_1^{\alpha_1}\dots p_r^{\alpha_r}$ où $p_1, \dots, p_r$ sont des nombres premiers impairs deux à deux distincts et $\alpha_1, \dots, \alpha_r$ sont des entiers strictement positifs. Pour tout i dans $[1, r]$, on pose $q_i = p_i^{\alpha_i}$. Démontrer que

$$A_q(S,T) = \prod_{i=1}^{r} A_{q_i}(S,T)$$

2) Dans cette question p désigne un nombre premier impair premier avec st et α est un entier naturel $\geqslant 1$. On considère une matrice $X \in M_{m,n}(\mathbb{Z})$ telle que $\pi_{p^\alpha}(X) \in \mathcal{A}_{p^\alpha}(S,T)$ et on pose $\widetilde{X} = \pi_p(X)$ et $\widetilde{S} = \pi_p(S)$.

2.a. Montrer que l'application $u : H \mapsto {}^t\widetilde{X}\widetilde{S}H$, est une application $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$-linéaire surjective $M_{m,n}(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})$ dans $M_n(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})$.

2.b. Montrer que l'application $v : H \mapsto {}^t\widetilde{X}\widetilde{S}H + {}^tH\widetilde{S}\widetilde{X}$ est une application $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$-linéaire surjective de $M_{m,n}(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})$ dans $S_n(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})$.

2.c. Montrer que le cardinal du noyau de l'application linéaire de la question précédente est $p^{mn-\frac{n(n+1)}{2}}$.

3) Montrer qu'il existe une matrice U dans $M_{m,n}(\mathbb{Z})$ telle que la matrice $Y = X + p^\alpha U$ de $M_{m,n}(\mathbb{Z})$ satisfasse $\pi_{p^{\alpha+1}}(Y) \in \mathcal{A}_{p^{\alpha+1}}(S,T)$.

4) Déduire de ce qui précède que l'application

$$\pi_{p^\alpha,p^{\alpha+1}} : M_{m,n}(\mathbb{Z}/p^{\alpha+1}\mathbb{Z}) \to M_{m,n}(\mathbb{Z}/p^\alpha\mathbb{Z})$$

induit une application $r_\alpha : \mathcal{A}_{p^{\alpha+1}}(S,\,T) \to \mathcal{A}_{p^\alpha}(S,T)$ surjective, et que les cardinaux des images réciproques par r_α des singletons valent tous $p^{mn-\frac{n(n+1)}{2}}$.

5) Déterminer $A_{p^\alpha}(S,\,T)$ pour tout $\alpha \geqslant 1$.

6) Soit q un entier naturel impair $\geqslant 1$ premier avec st.

6.a. Exprimer $A_q(S,T)$ en fonction de m, n, s, t, q et des facteurs premiers de q.

6.b. À quelle condition $A_q(S,\,T)$ est-il nul ?

7) On note $\mathcal{P}$ l'ensemble des nombres premiers ne divisant pas $2st$; pour tout entier h strictement positif, on pose $\mathcal{P}_h = \mathcal{P} \cap [1,h]$ et on note q_h le produit des éléments de $\mathcal{P}_h$. On fixe $m \geqslant 1$ et $n \geqslant 1$ de sorte que $m > n+2$.

7.a. Montrer que la suite $\left(A_{q_h}(S,\,T)\Big/q_h^{mn-\frac{n(n+1)}{2}}\right)_{h\geqslant 1}$ a une limite finie strictement positive.

7.b. Soit $Q_h = \prod_{p\in\mathcal{P}_h} p^h = q_h^h$.

Montrer que la suite $\left(A_{Q_h}(S,T)\Big/Q_h^{mn-\frac{n(n+1)}{2}}\right)_{h\geqslant 1}$ a une limite finie strictement positive.

Corrigé

A.I

1) Si $s = -\alpha^2$ avec $\alpha \in (\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^\times$, on a $x^2 + sy^2 = (x - \alpha y)(x + \alpha y)$. Comme p est impair, la matrice $\begin{pmatrix} 1 & -\alpha \\ 1 & \alpha \end{pmatrix}$ est inversible. Donc pour tout $t \in (\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^\times$, l'ensemble $\mathcal{A}_p(S,t)$ est en bijection avec $\{(u,v) \in (\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^\times \times (\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^\times ; uv = t\}$ par $(x,y) \mapsto (x - \alpha y, x + \alpha y)$. Ce dernier ensemble est de cardinal $p-1$; on a donc $A_p(S,t) = p - 1$.

2.a. Un polynôme de degré deux à coefficients dans un corps commutatif est irréductible si et seulement si il n'a pas de racine dans ce corps. Ici, $X^2 + s$ est irréductible sur $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$. Le choix d'une racine de $X^2 + s$ dans K fournit un homomorphisme surjectif et injectif d'anneaux $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}[X]/(X^2+s) \to K$. Le terme de gauche est un espace vectoriel de dimension 2 sur $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ (de base $\{1, \overline{X}\}$ où $\overline{X}$ désigne la classe de X modulo (X^2+s)). Le corps K est donc d'ordre p^2.

2.b. On a $F(0) = 0$, $F(1) = 1$ et $F : K^\times \to K^\times$ est un homomorphisme de groupes multiplicatifs. Pour voir que F est additif, il suffit de noter par la formule du binôme de Newton que les coefficients binomiaux $\begin{pmatrix} p \\ i \end{pmatrix}$ $(i = 1, \dots, p-1)$ sont divisibles par p. C'est clair car $i! \cdot (p-i)! \begin{pmatrix} p \\ i \end{pmatrix} = p!$ est divisible par p. Comme les deux premiers facteurs sont premiers à p, c'est que p divise le troisième. Ainsi F est un homomorphisme de corps. Tout homomorphisme de corps est injectif. Comme K est fini, F est donc bijectif. On a $F \circ F(z) = z^{p^2}$. Comme $K^\times$ est un groupe d'ordre $p^2 - 1$, on a pour tout $z \in K^\times$, $z^{p^2-1} = 1$, donc $z^{p^2} = z$. Cette relation est aussi satisfaite par 0, donc on a $F \circ F = Id_K$.

Si $z^p = z$, z est racine du polynôme $X^p - X$ de degré p. Par le petit théorème de Fermat, ce polynôme a exactement p racines. Le noyau de $F - Id_K$ est donc $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$.

2.c. Soit $\alpha \in K$ une racine de $X^2 + s$. $F(\alpha)$ est encore racine de $X^2 + s$ car $s \in \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ est fixé par F. Comme $\alpha \notin \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$, on a $F(\alpha) \neq \alpha$. Comme l'autre racine est $-\alpha$, on a $F(\alpha) = -\alpha$.

3.a. On a $N(z) = zF(z)$. C'est donc un homomorphisme multiplicatif de $K^\times$ dans lui-même. De plus $(N(z))^p = z^{p^2+p} = z^{1+p} = N(z)$ car $F \circ F = Id_K$. Ainsi, $N(z) \in (Z/p\mathbb{Z})^\times$.

3.b. Si $N(z) = 1$, z est racine de $X^{p+1} - 1$; ainsi l'ordre de $\operatorname{Ker} N$ est au plus $p+1$ et celui de $\operatorname{Im} N$ au plus $p-1$. Comme celui de $K^\times$ est $(p-1)(p+1)$, on tire de l'isomorphisme $K^\times/\operatorname{Ker} N \cong \operatorname{Im} N$ que $\operatorname{Card} \operatorname{Ker} N = p+1$ et $\operatorname{Card} \operatorname{Im} N = p-1$.

3.c. On a $N(x + y\alpha) = (x + y\alpha)F(x + y\alpha) = (x + y\alpha)(x - y\alpha) = x^2 - y^2\alpha^2 = x^2 + sy^2$.

4) Notons qu'étant donnés deux éléments x, y de $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$, on a $x + y\alpha \in K^\times$ si et seulement si x et y sont non-nuls. On peut donc écrire $\mathcal{A}_p(S,t) = \{z \in K^\times ; N(z) = t\}$. Choisissons $z_0 \in K^\times$ tel que $N(z_0) = t$. On a alors $N(z) = t$ si et seulement si $N(zz_0^{-1}) = 1$, c'est-à-dire $zz_0^{-1} \in \operatorname{Ker} N$. Ainsi $z \mapsto zz_0^{-1}$ est une bijection de $\mathcal{A}_p(S,t)$ vers $\operatorname{Ker} N$. L'ordre de $\mathcal{A}_p(S,t)$ est donc $p+1$ par 3.b.

A.II

1.a. On a $b(x,y) = \frac{1}{2}[b(x+y,x+y) - b(x,x) - b(y,y)]$. Si donc $b(t,t) = 0$ pour tout vecteur t, on a $b = 0$.

1.b. On raisonne par récurrence sur la dimension de V. Si $b = 0$ il n'y a rien à démontrer. Sinon, on prend $e_1 \in V$ tel que $b(e_1, e_1) \neq 0$. La relation $x = x - \frac{b(e_1,x)}{b(e_1,e_1)} \cdot e_1 + \frac{b(e_1,x)}{b(e_1,e_1)} \cdot e_1$ montre que V est somme directe de la droite engendrée par e_1 et de son orthogonal V_1. On applique alors l'hypothèse de récurrence à V_1 pour conclure.

1.c. On prend $V = M_{m,1}(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})$ et $b(X,Y) = {}^tXSY$. Soit P l'inverse de la matrice d'une base orthogonale de b. On a $S = {}^tPDP$ où D est diagonale.

2) La relation ${}^tXSX = T$ signifie pour tout i, j $b(v_i, v_j) = t_{i,j}$.

3) L'application

$$\mathcal{A}_p(S,T) \to \mathcal{A}_p({}^tPSP, {}^tQTQ), \quad X \mapsto P^{-1}XQ$$

est bijective.

4.a. On partitionne l'intervalle $[1,r]$ de $\mathbb{Z}$ en les sous-ensembles $\Phi(d)$ constitués des entiers dont le plus grand commun diviseur avec r est r/d, d parcourant l'ensemble des diviseurs positifs de d. La multiplication par r/d établit une bijection de $\Phi(d)$ avec l'ensemble des entiers premiers à d dans $[1,d]$. Son ordre est $\phi(d)$. On a donc $r = \sum_{d|r} \phi(d)$.

4.b. Un élément $x \in K^\times$ est d'ordre divisant d si et seulement si il est racine du polynôme de degré d $X^d - 1$. Il y a donc au plus d tels éléments dans $K^\times$.

4.c. Si $K^\times$ possède un élément x d'ordre d (diviseur $q-1$), il possède au moins d éléments d'ordre divisant d. Il en possède au plus d par la question précédente, donc exactement d, qui forment un groupe cyclique engendré par x. L'ensemble $(K^\times)_d$ des éléments d'ordre exactement d est donc d'ordre $\phi(d)$.

4.d. Si pour un diviseur d de $q-1$ il n'y a pas d'élément d'ordre d($i.e.$ $(K^\times)_d = \emptyset$), on a $q - 1 = \operatorname{Card} K^\times = \sum_{\delta|q-1} \operatorname{Card}(K^\times)_\delta < \sum_{\delta|q-1} \phi(\delta) = q-1$, ce qui est une contradiction.

A.III

1.a. L'homomorphisme $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^\times \to (\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^\times, x \mapsto x^2$ a pour noyau $\{\pm 1\}$. Son image est donc d'indice 2 dans $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^\times$. C'est dire qu'il y a autant de carrés que de non carrés dans $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^\times$.Soit a un non carré, tout non carré peut sécrire ax^2. Ainsi le produit de deux non carrés est un carré (et le produit d'un carré par un non carré est un non-carré, et le produit de deux carrés est un carré). Ceci montre que $x \mapsto (\frac{a}{p})$ est un homomorphisme.

1.b. Si $b \in (\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^\times$, $a \mapsto ab$ est bijective, donc $\sum_{a\in\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}} \omega^{ab} = \sum_{a\in\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}} \omega^a = \frac{\omega^p - 1}{\omega - 1} = 0$. Si $b = 0$, on a $\sum_{a\in\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}} \omega^{ab} = p$.

1.c. On a $G_c = 1+2 \sum_{a\in(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^{\times 2}} \omega^{ca}$. D'autre part, $H_c = \sum_{a\in(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^{\times 2}} \omega^{ca} - \sum_{a\notin(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^{\times 2}} \omega^{ca}$. Comme $c \in (\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^{\times}$, on a $\sum_{a\in\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}} \omega^{ac} = 0 = 1 + \sum_{a\in(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^{\times 2}} \omega^{ac} + \sum_{a\notin(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^{\times 2}} \omega^{ac}$, donc $1 + \sum_{a\in(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^{\times 2}} \omega^{ac} = -\sum_{a\notin(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^{\times 2}} \omega^{ac}$. Ainsi, $H_c = \sum_{a\in(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^{\times 2}} \omega^{ac} + 1 + \sum_{a\in(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^{\times 2}} \omega^{ac} = G_c$.

2.a. Par 1.b, la somme $\frac{1}{p}. \sum_{a\in(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})} \omega^{ab}$ vaut 1 ou 0 suivant que b est nul ou pas. Donc $pA_p(S,t) = \sum_{X\in M_{m,1}(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})} \frac{1}{p} \sum_{a\in\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}} \omega^{a({}^tXSX-t)}$. D'où la formule annoncée.

2.b. On a ${}^tXDX = \sum_{i=1}^{m} s_i x_i^2$ donc $\omega^{a({}^tXDX-t)} = \omega^{as_1x_1^2}\dots\omega^{as_mx_m^2}\omega^{-at}$ et

$$pA_p(S,t) = \sum_{a\in\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}} \omega^{-at}(\sum_{x_1\in\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}} \omega^{as_1x_1^2})\cdot\ldots\cdot(\sum_{x_m\in\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}} \omega^{as_mx_m^2})$$

La contribution du terme $a=0$ vaut p^m. De plus, on a pour chaque $i=1,\dots,m$. $\sum_{x_i\in\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}} \omega^{as_ix_i^2} = G_{as_i} = (\frac{as_i}{p})G$. Donc $pA_p(S,t) = p^m + \sum_{a\in(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^\times} \omega^{-at}(\frac{as_1}{p})\dots(\frac{as_m}{p})G)$ et comme $(\frac{s_1}{p})\cdot\ldots\cdot(\frac{s_m}{p}) = (\frac{D}{p})$, on a : $pA_p(S,t) = p^m + G^m(\frac{D}{p}) \sum_{a\in(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^\times} \omega^{-at}(\frac{a}{p})^m$.

2.c. Prenons $m=1$, $s_1=1$ et $t=1$. On a $A_p(S,1)=2$ donc comme $G_{-1} = (\frac{-1}{p})G$, on a $2p = p + G(\frac{-1}{p})G$, soit $p = G^2(\frac{-1}{p})$, ou encore $G^2 = (\frac{-1}{p})p$.

3.a. Pour S symétrique non-dégénérée quelconque, ,on applique A.II 1.c et 3 pour se ramener à S diagonale, de déterminant $s_1\dots s_m = s$. On obtient donc $pA(S,t) = p^m + (\frac{s}{p})G^m \sum_{a\in(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^\times} \omega^{-at}(\frac{a}{p})^m$.

Si $m=2r$, on a $G^m \sum_{a\in(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^\times} \omega^{-at}(\frac{a}{p})^m = -(\frac{-1}{p})^r p^r$, donc $pA(S,t) = p^m(1-(\frac{(-1)^{m/2}s}{p})p^{-m/2})$ d'où la formule annoncée.

Si $m=2r+1$, on a $G^m \sum_{a\in(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^\times} \omega^{-at}(\frac{a}{p})^m = (\frac{-t}{p})G^{m+1} = (\frac{-t}{p})(\frac{-1}{p})^{r+1}p^{r+1}$ donc $pA(S,t) = p^m(1+(\frac{(-1)^{(m-1)/2}st}{p})p^{(1-m)/2})$. D'où la formule annoncée.

3.b. Le seul cas de nullité intervient lorsque $m=1$ et lorsque st n'est pas un carré.

A.IV

1.a. On écrit $X = (C_1, X_1)$ où C_1 est un vecteur colonne et $X_1 \in M_{m,n-1}(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})$. Alors un calcul par blocs montre que ${}^tXSX = T$ équivaut à ${}^tC_1SC_1 = \delta$, ${}^tX_1SX_1 = T_1$ et ${}^tC_1SX_1 = 0$. L'application $X \mapsto C_1$ induit donc en particulier une application $\gamma : \mathcal{A}(S,T) \to \mathcal{A}(S,\delta)$.

1.b. Soit W l'orthogonal de C_1 dans l'espace quadratique $V = M_{m,1}(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})$ muni de $b(v,w) = {}^t vSw$. Soit $(v_i)_{i=2,\dots,m}$ une base de W. Soit $S_1 = (b(v_i,v_j))_{2\leqslant i,j\leqslant m}$ la matrice de b dans cette base. Soit $T_1 = (t_{i,j})_{2\leqslant i,j\leqslant n}$. Par la question précédente, on peut réécrire l'ensemble $\gamma^{-1}(C_1)$ comme

$$\{(w_2,\dots,w_n) \in W^{n-1}; b(w_i,w_j) = t_{i,j} \quad \text{pour tout}\, i,j \in [2,m]\}$$

Soit $X_1' \in M_{m-1,n-1}(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})$ la matrice des coordonnées des vecteurs colonnes w_j dans la base des v_i. On peut réécrire l'ensemble $\gamma^{-1}(C_1)$ comme

$$\mathcal{A}(S_1,T_1) = \{X_1' \in M_{m-1,n-1}(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}); {}^t X_1' S_1 X_1' = T_1\}$$

Soit P la matrice de la base $(v_1,\dots,v_m)$. On a

$$\begin{pmatrix} \delta & 0 \\ 0 & S_1 \end{pmatrix} = {}^t PSP$$

Donc si $s_1 = \det S_1$, on a $\delta s_1 = s(\det P)^2$ et $(\dfrac{\delta s_1}{p}) = (\dfrac{s}{p})$.

2.a. Pour $n = 1$, vue la convention sur les cas de nullité de $\varepsilon_k^{(p)}(a)$, les formules pour $A_p(S,t)$ distinguant m pair ou impair peuvent être synthétisées en la seule formule $A_p(S,t) = p^{m-1}\psi_{p,m,1}(s,t)$. Si le résultat est vrai pour $n-1$, soit $T \in S_n(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})$; quitte à remplacer T par ${}^t QTQ$), ce qui ne change pas $A_p(S,T)$ par A.II.3, on peut supposer T diagonale (et en particulier de la forme de la question 1.2 ci-dessus. Avec les notations de la question 1.b, on a $A_p(S,T) = A_p(S,\delta)A_p(S_1,T_1)$. Par hypothèse de récurrence, $A_p(S_1,T_1) = p^{(m-1)(n-1)-(n-1)n/2}\psi_{p,m-1,n-1}(s_1,t_1) \displaystyle\prod_{m-n+1<2k<m} (1-\frac{1}{p^{2k}})$. et $A_p(S,\delta) = p^{m-1}\psi_{p,m,1}(s,\delta)$. Traitons par exemple le cas où m et n sont pairs. On observe que

- $(m-1)(n-1) - n(n-1)/2 + (m-1) = mn - n(n+1)/2$
- $\psi_{p,m,1}(s,\delta) = 1 - (\dfrac{(-1)^{m/2}s}{p})p^{-m/2}$ et
- $\psi_{p,m-1,n-1}(s_1,t_1) = 1 + (\dfrac{(-1)^{(m-n)/2}s_1t_1}{p})p^{(n-m)/2}$, et comme par la question 1.2 on a $s_1t_1\delta^2 = stu^2$, on trouve $\psi_{p,m,1}(s,\delta)\psi_{p,m-1,n-1}(s_1,t_1) = \psi_{p,m,n}(s,t)$. Comme on a aussi
- $\displaystyle\prod_{m-n<2k<m} (1-\frac{1}{p^{2k}}) = \prod_{m-n+1<2k<m} (1-\frac{1}{p^{2k}})$

on voit donc en multipliant $A_p(S,\delta)$ et $A_p(S_1,T_1)$ que

$$A_p(S,T) = p^{mn-n(n+1)/2}\psi_{p,m,n}(s,t) \prod_{m-n<2k<m} (1-\frac{1}{p^{2k}})$$

comme annoncé. Les autres cas se traitent de même.

2.b. Le seul cas de nullité de $A_p(S,T)$ se produit lorsque $m = n$ et que st n'est pas un carré.

B.

1.a. et **1.b.** se traitent simultanément en observant que, lorsque q_1 et q_2 sont premiers entre eux, le lemme chinois induit un isomorphisme d'anneaux $M_{m,n}(\mathbb{Z}/q_1q_2\mathbb{Z}) \cong M_{m,n}(\mathbb{Z}/q_1\mathbb{Z}) \times M_{m,n}(\mathbb{Z}/q_2\mathbb{Z})$.

1.c. est immédiat à partir des questions ci-dessus.

2.a. Soit $\widetilde{T} = \pi_p(T)$. Soit $H_1 \in M_n(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})$. Soit $H_2 \in M_n(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})$ telle que $H_1 = \widetilde{T}H_2$; posons $H = \widetilde{X}H_2 \in M_{m,n}(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})$. On a ${}^t\widetilde{X}\widetilde{S}H = {}^tX\widetilde{S}\widetilde{X}H_2 = \widetilde{T}H_2 = H_1$.

2.b. Comme p est impair, toute matrice symétrique $H_1 \in S_n(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})$ s'écrit $H_2 + {}^tH_2$ pour une matrice $H_2 \in M_n(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})$; par la question précédente, il existe $H \in M_{m,n}(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})$ tel que ${}^t\widetilde{X}\widetilde{S}H = H_2$. Ceci montre la surjectivité de $H \mapsto {}^t\widetilde{X}\widetilde{S}H + {}^tH\widetilde{S}\widetilde{X}$.

2.c. Le noyau de l'application ci-dessus est de dimension $mn - n(n+1)/2$. Donc son cardinal est $p^{mn-n(n+1)/2}$.

3) On abrège $\pi_{p^\alpha}(X) = X_\alpha$. Si ${}^tX_\alpha S_\alpha X_\alpha = T_\alpha$, posons $Y = X + p^\alpha U$. Cherchons $U \in M_{m,n}(\mathbb{Z})$ de sorte que ${}^tYSY \equiv T \pmod{p^{\alpha+1}}$. On peut réécrire cette relation comme ${}^t(X + p^\alpha U)S(X + p^\alpha U) \equiv T \pmod{p^{\alpha+1}}$, ou encore, en posant ${}^tXSX = T + p^\alpha\Theta$: ${}^tUSX + {}^tXSU \equiv \Theta \pmod{p}$. Par la question 2.2, cette congruence a une solution $U \in M_{m,n}(\mathbb{Z})$.

4) Étant donnée $X \in M_{m,n}(\mathbb{Z})$ telle que ${}^tXSX \equiv T \pmod{p^\alpha}$, l'ensemble $\{\pi_p(U) \in M_{m,n}(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}); {}^tUSX + {}^tXSU \equiv \Theta \pmod{p}\}$ est une variété linéaire affine de direction de dimension $mn - n(n+1)/2$. C'est donc un ensemble d'ordre $p^{mn-n(n+1)/2}$. Ainsi, r_α est surjective et l'image inverse de chaque singleton est d'ordre $p^{mn-n(n+1)/2}$.

5) On en déduit que

$$A_{p^\alpha} = p^{(\alpha-1)(mn-n(n+1)/2)}p^{mn-n(n+1)/2}\psi_{p,m,n}(s,t) \prod_{m-n<2k<m}(1 - \frac{1}{p^{2k}}) =$$

$$p^{\alpha(mn-n(n+1)/2}\psi_{p,m,n}(s,t) \prod_{m-n<2k<m}(1 - \frac{1}{p^{2k}}).$$

6.a. On a

$$A_q(S,T) = A_{p_1^{\alpha_1}}(S,T)\dots A_{p_r^{\alpha_r}}(S,T) = q^{\alpha(mn-n(n+1)/2)}\prod_i \psi_{p_i,m,n}(s,t) \prod_{m-n<2k<m}(1 - \frac{1}{p_i^{2k}})$$

6.b. La nullité de $A_q(S,T)$ ne se produit que lorsque $m = n$ et que st n'est pas un carré modulo l'un des facteurs premiers de q.

7.a. On a $A_{q_h}(S,T)/q_h^{mn-n(n+1)/2} = \prod_i \psi_{p_i,m,n}(s,t) \prod_{m-n<2k<m}(1 - \frac{1}{p_i^{2k}})$ On a $m > n+2$ donc en particulier $m/2 > 3/2$ et $(m-n)/2 > 1$; donc les produits infinis $\prod_i(1 - (\frac{(-1)^{m/2}s}{p_i})p_i^{-m/2})$ et $\prod_i(1 - (\frac{(-1)^{(m-n)/2}st}{p_i})p_i^{-(m-n)/2})$ sont absolument convergents.

A fortiori les produits $\prod_i(1 - \frac{1}{p_i^{2k}})$ pour $2k \in]m-n, m[$. Leur limite sont des nombres strictement positifs. Il en va donc de même pour leur produit fini.

7.b. L'argument est identique car $A_{Q_h}(S,T)/Q_h^{mn-n(n+1)/2} = A_{q_h}(S,T)/q_h^{mn-n(n+1)/2}$

Rapport des correcteurs

Le problème portait sur l'étude, pour deux matrices symétriques S et T à coefficients dans $\mathbb{Z}$ données de tailles respectives m et n, des nombres $A_q(S,T)$ de solutions $X \in M_{m,n}(\mathbb{Z}/q\mathbb{Z})$ de la congruence ${}^tXSX \equiv T \pmod{q}$. On faisait l'hypothèse simplificatrice que les matrices sont définies positives et que q est premier à $2\det S \cdot \det T$.

La partie A concernait le cas où q est premier ; la partie B consistait à déduire le cas général du cas A. La partie $A.I$ proposait de calculer le nombre $A_p(S,T)$ pour $m=2$ et $n=1$ en distinguant selon que $-\det S$ est un carré ou non modulo p.

La première question de cette partie a semble-t'il posé problème à de nombreux candidats. Elle reposait sur l'identité remarquable $a^2-b^2=(a-b)(a+b)$. Elle a occasionné les dénombrements les plus variés, conduisant parfois à des résultats absurdes. Pour les écrire, il a fallu que le candidat renonce au bon sens dont il aurait fait preuve en physique : une erreur de calcul peut conduire à trouver un cardinal égal à $\dfrac{p}{2}$ (pour p premier impair), ou à l'infini, pour un ensemble fini. Mais alors, le "bon sens physique", valable aussi en algèbre, aurait pu suggérer une relecture du calcul...

La confusion entre (auto)morphisme de corps, de groupes et d'espaces vectoriels a conduit certains candidats à ne pas vérifier la multiplicativité de F ainsi que la condition $F(1)=1$, et inversement, elle en a conduit d'autres à vérifier l'additivité de N et à chercher son noyau comme l'ensemble des z tels que $N(z)=0$.

Il faut essayer de dégager les structures algébriques concernées par les questions avant de se lancer dans les vérifications.

Atention dans 2.c, on ne peut écrire sans précaution $\alpha = i\sqrt{-s}$ (vu que $i \in \mathbb{C}$ et $s \in \mathbb{F}_p$).

Dans $A.I$ et dans $B.1$, on a beaucoup vu d'énoncés de questions recopiés. C'est une remarque générale : recopier ou plagier l'énoncé ne rapporte rien !

La première question de $A.II$ a également surpris les correcteurs.On a vu des formes quadratiques définies et positives sur $\mathbb{F}_p$. La méthode de Gram-Schmidt ne s'applique que dans le contexte d'une forme quadratique réelle définie positive. C'est cependant souvent la méthode choisie pour montrer l'existence d'une base orthogonale dans le cadre du corps $\mathbb{F}_p$! Une erreur du même ordre a souvent été le recours à une "diagonalisation" de la forme quadratique avec matrice de passage orthogonale. Cette confusion classique dans le cadre réel de la réduction d'une forme quadratique avec la diagonalisation d'une matrice symétrique devient vraiment absurde sur $\mathbb{F}_p$ car une matrice symétrique n'est même plus nécessairement diagonalisable (comme le montre l'exemple de $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$ sur $\mathbb{F}_5$).

En fait, on traite la question 1.b de $A.I$ par récurrence sur la dimension. Il faut cependant rédiger les récurrences et non se contenter de les amorcer en finissant par un "et ainsi de suite".

Une erreur courante, moins grave certes, est de penser que dans l'écriture $S = {}^tPDP$, la matrice P est la matrice de passage de la base canonique de K^n à la base orthogonale construite, alors que c'est l'inverse.

La cyclicité de $K^\times$ a souvent été mal traitée ; les questions 4.a-4.d occasionnent des réponses floues voire fausses alors que les candidats peuvent penser les avoir traitées correctement.

Certains ont tenté d'adapter une démonstration différente de celle demandée, en général sans succès. Encore une remarque générale : pour obtenir les points d'une question, il s'agit de répondre exactement à la question telle qu'elle est posée, y compris s'il s'agit d'une question de cours.

Le simple bon sens montre qu'on ne répond pas à $A.II.1.b$ en citant le théorème du cours affirmant qu'il existe une base orthogonale, de même qu'on ne répond pas à $4.a$-$4.d$ en citant celui qui affirme que $K^\times$ est cyclique !

$A.III$ Le symbole de Legendre et les sommes de Gauss semblaient connus des candidats, mais trop souvent les calculs proposés se sont bornés à une suite d'égalités non justifiées (et parfois erronées, conduisant malgré tout au résultat). Les formules écrites laissent souvent entendre que l'ensemble dans lequel vivent les sommes de Gauss n'est pas clair : on lit souvent que si p divise b, $\sum_a \omega^{ab} = p = 0$ et que $e^{2i\pi/p} \in \mathbb{F}_p$ (!) La réalité est que les sommes de Gauss sont des nombres complexes !

La partie $A.III.3$ n'a été abordée que par très peu de candidats.

Dans $A.IV$, seule la première question a été souvent abordée.

Pour la partie $B1$, de nombreuses copies proposaient une démonstration très pénible de l'injectivité. Certains candidats ont montré qu'ils n'avaient pas compris le théorème chinois, qu'ils pouvaient néanmoins citer, puisqu'ils affirmaient que la surjectivité sur le produit résultait de la surjectivité sur chacun des facteurs. En général, seules les questions évidentes du $B.II$ ont été abordées. Les autres questions n'ont concerné que quelques candidats.

Épreuve écrite d'analyse et probabilités

Le but du problème est de donner une preuve partielle du théorème de la variété stable.

Préliminaires et notations

Préliminaires généraux

Dans tout le problème, k désigne un entier strictement positif ; $\mathbb{R}$ est le corps des nombres réels, $\mathbb{C}$ celui des nombres complexes. Le complémentaire d'un sous-ensemble Y dans X est noté $X - Y$.

Si E et F sont des espaces vectoriels, $\mathcal{L}(E,\, F)$ désigne l'ensemble des applications linéaires de E dans F, $\mathrm{End}(E)$ l'ensemble des endomorphismes de E et $\mathrm{Aut}(E)$ celui des automorphismes de E. Le déterminant d'un endomorphisme A est noté $\det A$.

Dans $\mathbb{R}^k$, le produit scalaire canonique de deux vecteurs u et v est noté $< u, v >$.

Si f est un homéomorphisme d'un espace métrique $(X,\, d)$, on désigne par f^n la n-ième itérée de f. Si x est élément de X, la variété[3] stable pour f du point x est l'ensemble

$$W^s_x(f) = \big\{ y \in X \ \big|\ \lim_{n\to\infty} d\big(f^n(x),\, f^n(y)\big) = 0 \big\}.$$

De même, la variété instable pour f du point x est l'ensemble

$$W^u_x(f) = \big\{ y \in X \ \big|\ \lim_{n\to\infty} d\big(f^{-n}(x),\, f^{-n}(y)\big) = 0 \big\}.$$

Soit γ un réel strictement positif. On rappelle qu'une application f d'un espace métrique $(X,\, d)$ dans lui-même est lipschitzienne de rapport γ (ou γ-lipschitzienne) si

$$\forall (x,y) \in X^2, \quad d\big(f(y),\, f(x)\big) \leqslant \gamma\; d(x,y).$$

On note Li_γ l'ensemble des applications $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ γ-lipschitziennes s'annulant en 0.

Fonctions définies sur $\mathbb{R}^2$

Dans les parties 1, 4 et 5, $\mathbb{R}^2$ sera muni de la norme $|(x_1,\, x_2)| = \max\big\{|x_1|, |x_2|\big\}$.

Soit h une application bornée, élément de $C^1(\mathbb{R}^2,\, \mathbb{R})$ et dont la différentielle $\mathrm{d}h$ est bornée. On note :

- $|h|_\infty = \sup\limits_{x\in\mathbb{R}^2} |h(x)|$;
- $\mathrm{d}h_x$ la différentielle de h au point x $\big(\mathrm{d}h_x \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2,\, \mathbb{R})\big)$;
- $\|\mathrm{d}h_x\|$ la norme subordonnée dans $\mathcal{L}(\mathbb{R}^2,\, \mathbb{R})$ de $\mathrm{d}h_x$;
- $|\mathrm{d}h|_\infty = \sup\limits_{x\in\mathbb{R}^2} \|\mathrm{d}h_x\|$;

[3] **Dans ce problème, le mot variété est juste une notation.**

et on pose $|h|_{C^1} = \max(|h|_\infty, |\mathrm{d}h|_\infty)$.

Liens entre les différentes parties

- *la partie* 3 *utilise les résultats de la partie* 2 *;*
- *la partie* 4 *utilise les résultats des parties* 1 *et* 2 *;*
- *la partie* 5 *est indépendante du reste du problème.*

Les candidats peuvent admettre les résultats d'une question à condition de l'indiquer clairement et poursuivre le problème en respectant la numérotation des questions.

1. Introduction

1.1. Montrer que l'application $d_\gamma :\ (\varphi, \psi) \mapsto \sup_{x\in\mathbb{R}-\{0\}} \dfrac{|\psi(x) - \varphi(x)|}{|x|}$, définie sur $(Li_\gamma)^2$, est une distance.

1.2. Montrer que, pour la métrique définie par la distance d_γ, Li_γ est complet.

1.3. Soient $\mu > 0$, $h \in C^1(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ et $\varphi \in Li_\gamma$ tels que $|h|_{C^1}(1+\gamma) < \mu$.
Montrer que l'application G_φ définie par

$$\forall x \in \mathbb{R},\ G_\varphi(x) = \mu x + h\bigl(x, \varphi(x)\bigr),$$

est strictement croissante. En déduire que G_φ un homéomorphisme de $\mathbb{R}$.

2. Partie linéaire

Soit A un endomorphisme de $\mathbb{R}^k$. Le rayon spectral $r(A)$ est par définition le maximum des modules des valeurs propres complexes de A.

2.1. Soit ε' un réel strictement positif. Justifier qu'il existe une base $\mathcal{B}$ de $\mathbb{C}^k$ dans laquelle la matrice

$$a = (a_{i,j})_{\substack{1\leqslant i\leqslant k\\ 1\leqslant j\leqslant k}}$$

de A est triangulaire supérieure et telle que pour tous i et j vérifiant $1 \leqslant i < j \leqslant k$, on ait $|a_{i,j}| \leqslant \varepsilon'$.

2.2. En déduire que pour tout réel ε strictement positif, il existe sur $\mathbb{R}^k$ une norme notée N dite ε-adaptée pour A, c'est-à-dire telle que pour la norme d'opérateur subordonnée $\|\cdot\|_N$:

$$\|A\|_N \leqslant r(A) + \varepsilon.$$

2.3. Montrer que, pour toute norme $\|\cdot\|$ sur $\mathbb{R}^k$ et tout réel ε strictement positif, il existe une constante C_ε strictement positive telle que, pour tout $v \in \mathbb{R}^k$ et tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\|A^n v\| \leqslant C_\varepsilon (r(A) + \varepsilon)^n \|v\|.$$

On dira que $A \in \mathrm{End}(\mathbb{R}^k)$ est hyperbolique si toutes ses valeurs propres complexes ont un module différent de 1.

Dans toute la suite de cette partie, A désigne un endomorphisme hyperbolique de $\mathbb{R}^k$.

2.4. Montrer qu'il existe deux sous-espaces vectoriels supplémentaires E^+ et E^- de $\mathbb{R}^k$ stables par A tels que la restriction de A à E^+ (resp. E^-) ait toutes ses valeurs propres (dans $\mathbb{C}$) de module strictement supérieur (resp. inférieur) à 1.

On désigne par $A_{|E}$ la restriction de A au sous-espace E.

2.5. Montrer que $(A_{|E^+})$ est inversible.

2.6. Montrer qu'il existe une norme dite A-adaptée $\|\cdot\|$ telle que

$$\forall (x^+,\, x^-) \in E^+ \times E^-,\ \|x^+ + x^-\| = \max(\|x^+\|, \|x^-\|)$$

et de plus pour la norme subordonnée :

$$\|A_{|E^-}\| < 1 \quad \text{et} \quad \|(A_{|E^+})^{-1}\| < 1.$$

2.7. Montrer que, pour tout $v \in E^-$, la suite $(A^n(v))_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0.

2.8. Montrer de même que, pour tout $v \in E^+$ non nul, la suite $\big(\|A^n(v)\|\big)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers $+\infty$.

Préliminaires pour les parties 3 et 4

Le tore $\mathbb{T}^k$ est par définition le groupe additif quotient du groupe $(\mathbb{R}^k, +)$ par le sous-groupe $(\mathbb{Z}^k, +)$. Tout élément x de $\mathbb{T}^k$ peut s'écrire de manière unique $x = (x_1,\, \dots,\, x_k)$, avec $x_i \in \mathbb{T}^1$, pour $i = 1,\, \dots,\, k$.
On définit la projection canonique $\Pi : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^k/\mathbb{Z}^k = \mathbb{T}^k$.

3. Linéarité et topologie

On considére le sous-ensemble $E = \{L \in \mathrm{End}(\mathbb{R}^k) \mid L(\mathbb{Z}^k) \subset \mathbb{Z}^k\}$ de $\mathrm{End}(\mathbb{R}^k)$ ainsi que le sous-ensemble $\mathcal{E} = \{L \in \mathrm{Aut}(\mathbb{R}^k) \mid L \in E \text{ et } L^{-1} \in E\}$ de $\mathrm{Aut}(\mathbb{R}^k)$.

3.1. Montrer qu'un élément L de $\mathrm{End}(\mathbb{R}^k)$ appartient à E si, et seulement si, sa matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}^k$ est à coefficients dans $\mathbb{Z}$.

3.2. Montrer qu'un élément L de E appartient à $\mathcal{E}$ si, et seulement si, $\det L$ vaut -1 ou 1.

3.3. Dans cette question, on se place dans $\mathbb{R}^2$ et on considère l'endomorphisme L défini, pour tout $(x,\, y) \in \mathbb{R}^2$, par $L(x,\, y) = (2x + y,\, x + y)$. Cet endomorphisme est-il hyperbolique ? Est-il dans l'ensemble $\mathcal{E}$?

Existe-t-il des exemples comparables sur $\mathbb{R}$?

Dans toute la suite de cette partie 3, L désigne un élément hyperbolique de $\mathcal{E}$. Les sous-espaces vectoriels E^+ et E^- sont deux sous-espaces vectoriels supplémentaires de $\mathbb{R}^k$ stables par L tels que la restriction de L à E^+ (resp. E^-) ait toutes ses valeurs propres (dans $\mathbb{C}$) de module strictement supérieur (resp. inférieur) à 1 ; l'existence de cette décomposition a été démontrée au 2.4.

On dit qu'un élément x de $[0,1]^k$ est un point périodique de L s'il existe un entier p strictement positif tel que $L^p(x)-x$ appartient à $\mathbb{Z}^k$. On désigne par $\mathrm{Per}L$ l'ensemble des points périodiques de L.

3.4. Démontrer que l'ensemble des points périodiques de L est donné par

$$\mathrm{Per}L = \mathbb{Q}^k \cap [0,1]^k.$$

En déduire que $\mathrm{Per}L$ est dense dans $[0,1]^k$.

3.5. Montrer que pour une distance donnant la topologie usuelle, les variétés stables et instables pour L d'un point a de $\mathbb{R}^k$ sont respectivement $W_a^s(L) = a + E^-$ et $W_a^u(L) = a + E^+$.

3.6. Soit N une norme sur $\mathbb{R}^k$. On définit une application d de $\mathbb{T}^k \times \mathbb{T}^k$ dans $\mathbb{R}$ en posant

$$d(y,\, y') = \inf\big\{N(x - x') \;\big|\; x,\, x' \in \mathbb{R}^k \text{ avec } \Pi(x) = y \text{ et } \Pi(x') = y'\big\}.$$

1. Montrer que $\inf\limits_{z \in \mathbb{Z}^k - \{0\}} N(z)$ est strictement positif.
2. Montrer que d définit une distance sur $\mathbb{T}^k$.
3. Prouver que l'application $\Pi : \mathbb{R}^k \to \mathbb{T}^k$ est continue.

Dans la suite, $\mathbb{T}^k$ est muni de la topologie associée à la distance d.

3.7. Montrer que L induit un homéomorphisme noté F_L du tore $\mathbb{T}^k$ satisfaisant la relation de commutation

$$F_L \circ \Pi = \Pi \circ L.$$

La suite de cette partie n'est pas utilisée dans le reste du problème.

3.8. On suppose que la distance d provient d'une norme N adaptée pour L. Montrer que :

1. $\Pi(0 + E^-) \subset W_0^s(F_L)$;
2. $\Pi(0 + E^+)$ est dense dans $\mathbb{T}^k$;
3. la variété stable pour F_L du point 0 est dense dans $\mathbb{T}^k$.

Une application continue $f : \mathbb{T}^k \to \mathbb{T}^k$ est dite topologiquement mélangeante si, pour toute paire d'ouverts non vides U et V de $\mathbb{T}^k$, il existe un entier n_0, tel que :

$$\forall n > n_0,\ f^n(U) \cap V \neq \varnothing.$$

3.9. Montrer qu'une isométrie de $\mathbb{T}^k$ n'est pas une application topologiquement mélangeante.

3.10. Montrer que F_L est une application topologiquement mélangeante.

Indication : *On pourra utiliser, outre le fait que 0 est un point fixe, la densité de la variété stable pour un automorphisme hyperbolique F_L du point 0 ainsi que la densité de la variété stable pour F_L^{-1} du point 0.*

4. Un exemple presque linéaire dans $\mathbb{R}^2$

Dans la partie 4, f est une application élément de $C^1(\mathbb{R}^2,\, \mathbb{R}^2)$, fixant l'origine et proche en C^1-topologie d'un automorphisme linéaire hyperbolique diagonal A défini, pour tout $(x,\, y) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2$ par $A(x,y) = (\mu x,\, \lambda y)$ avec $0 < \lambda < 1 < \mu$. Ceci signifie que f est de la forme

$$f(x,y) = \big(\mu x + \alpha(x,\, y),\, \lambda y + \beta(x,\, y)\big)$$

avec α et β vérifiant $\alpha(0,0) = 0$, $\beta(0,0) = 0$ et il existe un réel δ, strictement positif, tel que $|\alpha|_{C^1} < \delta$ et $|\beta|_{C^1} < \delta$.

Dans la suite δ sera considéré comme petit, ce qui sera précisé par des inégalités.

4.1. Prouver que si $2\delta < \lambda$, f est un difféomorphisme de $\mathbb{R}^2$.

Indication : *On pourra montrer que pour tout $(x', y') \in \mathbb{R}^2$ l'application*

$$F_{(x',y')} :\, (x,\, y) \mapsto \left(\frac{x'}{\mu} - \frac{\alpha(x,y)}{\mu},\, \frac{y'}{\lambda} - \frac{\beta(x,y)}{\lambda}\right)$$

est lipschitzienne de rapport a, avec $0 < a < 1$.

Inégalités (*)

Dans toute la suite de cette partie on suppose qu'il existe un nombre γ vérifiant les inégalités

$$(*)\begin{cases} 0 < \gamma < 1 \\ 0 < \delta < \dfrac{\gamma(\mu - \lambda)}{\gamma + 2} \end{cases}$$

Le graphe d'une application $\varphi\ : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est la partie de $\mathbb{R}^2$ définie par

$$H\varphi = \big\{\big(x,\, \varphi(x)\big)\ \big|\ x \in \mathbb{R}\big\}.$$

Dans la suite, on considère l'application G_φ définie, pour tout x réel, par

$$G_\varphi(x) = \mu x + \alpha\big(x,\, \varphi(x)\big).$$

4.2. Montrer que si φ est élément de Li_γ il existe une fonction $\psi\, :\, \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telle que : $f(H\varphi) = H\psi$.

4.3. Montrer que $f_* : \varphi \mapsto \psi$, définie à la question précédente, est une application de Li_γ dans lui-même.

4.4. Prouver pour tous φ et φ' dans Li_γ et pour tout x dans $\mathbb{R}$, l'inégalité

$$\big|f_*(\varphi)\big(G_\varphi(x)\big) - f_*(\varphi')\big(G_\varphi(x)\big)\big| \leqslant \big(\lambda + \delta(1+\gamma)\big)\big|\varphi'(x) - \varphi(x)\big|.$$

4.5. En déduire qu'il existe une application φ^+ dans Li_γ dont le graphe H_{φ^+} est invariant par f.

Prouver l'inégalité $\big|f\big(x,\, \varphi^+(x)\big)\big| \geqslant (\mu - \delta)\big|\big(x,\, \varphi^+(x)\big)\big|$.

4.6. Pourquoi, si $\gamma,\ \delta$ satisfont les inégalités (*) et si δ est suffisamment petit, peut-on dire que l'ensemble $\big\{\big(x,\,\varphi^+(x)\big)\ \big|\ x\in\mathbb{R}\big\}$ est contenu dans la variété instable pour f du point $(0,0)$?

Commentaires sur les variétés stables et instables

On prouverait avec les mêmes arguments l'existence d'une variété stable de l'origine qui est le "graphe vertical" d'une fonction lipschitzienne $\varphi^-\in Li_\gamma$ c'est-à-dire

$$W_0^s(f)=\big\{\big(\varphi^-(x),\,x\big)\ \big|\ x\in\mathbb{R}\big\}.$$

On pourrait aussi montrer que les variétés stables et instables sont en fait des graphes d'applications de classe C^1.

5. Différentiabilité des fonctions lipschitziennes

Soit $\varphi\in Li_\gamma$ et $x\in\mathbb{R}$; on introduit, pour $y\neq x$, $\quad \Delta_y\varphi=\dfrac{\big(y,\varphi(y)\big)-\big(x,\varphi(x)\big)}{\big|\big(y,\varphi(y)\big)-\big(x,\varphi(x)\big)\big|}$, on pose :

$$U_x\varphi=\Big\{v\in\mathbb{R}^2\ \Big|\ \exists(x_n)_{n\in\mathbb{N}},\ \lim_{n\to\infty}x_n=x,\ \forall n\in\mathbb{N},\ x_n\neq x \text{ et } \lim_{n\to\infty}\Delta_{x_n}\varphi=v\Big\}$$

et on définit l'ensemble tangent au graphe de φ au point x comme

$$T_x\varphi=\bigcup_{v\in U_x\varphi}\mathbb{R}v,\ \text{avec } \mathbb{R}v=\{av\,|\,a\in\mathbb{R}\}.$$

5.1. Montrer que $\mathrm{pr}_1(T_x\varphi)=\mathbb{R}$ où pr_1 est la projection sur le premier facteur :

$$\text{pour } u=(u_1,u_2)\in\mathbb{R}^2,\ \mathrm{pr}_1(u)=u_1.$$

Indication : *On pourra remarquer que pour tout $y\neq x$, $|\Delta_y\varphi|=1$.*

5.2. Le cône horizontal H^γ est l'ensemble $H^\gamma=\big\{(u_1,u_2)\in\mathbb{R}^2\ \big|\ |u_2|\leqslant\gamma|u_1|\big\}$. Montrer l'inclusion $T_x\varphi\subset H^\gamma$.

5.3. On considére la fonction continue sur $\mathbb{R}$ définie pour tout réel x non nul par

$$\phi(x)=\frac{x}{2}\cdot\sin\big(\ln|x|\big).$$

Appartient-elle à Li_γ pour un certain γ ? Expliciter $T_0\phi$.

5.4. On suppose que $\gamma\leqslant 1$. Montrer que, si $T_x\varphi$ est un sous-espace vectoriel de dimension 1 de $\mathbb{R}^2$, alors φ est dérivable en x.

Corrigé

1 Introduction

1. • d_γ est bien définie car le rapport est borné par 2γ, en remarquant que :
$$\frac{|\psi(x)-\varphi(x)|}{|x|}\leqslant\frac{|\varphi(x)-\varphi(0)|}{|x|}+\frac{|\psi(x)-\psi(0)|}{|x|}\leqslant 2\gamma.$$
   • Si $d_\gamma(\varphi,\psi)=0$, alors pour tout $x\in\mathbb{R}$, $\varphi(x)=\psi(x)$ donc $\varphi=\psi$.
   • La symétrie est évidente.
   • Si φ, ψ, θ sont trois éléments de Li_γ :
   $\forall x\in\mathbb{R}^*, \left|\frac{\theta(x)-\varphi(x)}{x}\right|\leqslant\left|\frac{\theta(x)-\psi(x)}{x}\right|+\left|\frac{\psi(x)-\varphi(x)}{x}\right|\leqslant d_\gamma(\theta,\psi)+d_\gamma(\psi,\varphi)$
   donc $d_\gamma(\theta,\varphi)\leqslant d_\gamma(\theta,\psi)+d_\gamma(\psi,\varphi)$.
   $\boxed{d_\gamma \text{ est une distance sur } Li_\gamma}$.
2. Soit $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de Cauchy de (Li_γ,d). Alors :
$$\forall\varepsilon>0,\exists N\in\mathbb{N},\forall n\geqslant p\geqslant N, d_\gamma(\varphi_n,\varphi_p)\leqslant\varepsilon. \tag{1}$$
   Pour $x\neq 0$ fixé, on a donc : $\forall n\geqslant p\geqslant N, |\varphi_n(x)-\varphi_p(x)|\leqslant\varepsilon\,|x|$.
   Ainsi, $(\varphi_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy de $\mathbb{R}$: elle converge vers une limite $\varphi(x)$.
   Comme φ_n appartient à Li_γ : $\forall n\in\mathbb{N},\varphi_n(0)=0$, donc $(\varphi_n(0))_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $\varphi(0)=0$ et $\forall(x,y)\in\mathbb{R}^2, |\varphi_n(x)-\varphi_n(y)|\leqslant\gamma\,|x-y|$ donc $|\varphi(x)-\varphi(y)|\leqslant\gamma\,|x-y|$.
   Ainsi, φ est encore élément de Li_γ.
   En passant à la limite lorsque n tend vers $+\infty$ dans (1) :
   $$\forall x\in\mathbb{R}\setminus\{0\},\forall p\geqslant N, \left|\frac{\varphi(x)-\varphi_p(x)}{x}\right|\leqslant\varepsilon \text{ donc } \forall p\geqslant N, d_\gamma(\varphi_p,\varphi)\leqslant\varepsilon.$$
   Ainsi, la suite $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers φ dans (Li_γ,d_γ) : $\boxed{(Li_\gamma,d_\gamma) \text{ est complet}}$.
3. (a) Soit x, y des réels tels que $x<y$. Alors :
$$G_\varphi(y)-G_\varphi(x)=\mu(y-x)+h(y,\varphi(y))-h(x,\varphi(x)).$$
   On remarque que : $|\varphi(x)-\varphi(y)|\leqslant\gamma\,|x-y|$ donc $|(y,\varphi(y))-(x,\varphi(x))|\leqslant(1+\gamma)\,|x-y|$.
   D'après l'inégalité des accroissements finis :
   $$|h(y,\varphi(y))-h(x,\varphi(x))|\leqslant|h|_{C^1}\,|(y,\varphi(y))-(x,\varphi(x))|\leqslant|h|_{C^1}\,(1+\gamma)\,|y-x|<\mu\,|y-x|$$
   donc $G_\varphi(y)-G_\varphi(x)>0$: $\boxed{G_\varphi \text{ est strictement croissante}}$.

   (b) G_φ est continue strictement croissante donc définit un homéomorphisme de $\mathbb{R}$ sur $\left]\lim\limits_{x\to-\infty}G_\varphi(x),\lim\limits_{x\to+\infty}G_\varphi(x)\right[$.
   Or, comme ci-dessus, pour $x>0$: $G_\varphi(x)-G_\varphi(0)\geqslant(\mu-(1+\gamma)\,|h|_{C^1})\,x\xrightarrow{x\to+\infty}+\infty$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty}G_\varphi(x)=+\infty$. De même, $\lim\limits_{x\to-\infty}G_\varphi(x)=-\infty$.
   Ainsi $\boxed{G_\varphi \text{ est un homéomorphisme de } \mathbb{R}}$.

2 Partie linéaire

1. Le polynôme caractéristique de A est scindé dans $\mathbb{C}$, donc il existe une base $\mathcal{B}' = (e'_i)_{1\leqslant i\leqslant k}$ de $\mathbb{C}^k$ dans laquelle la matrice de A prend la forme d'une réduite de Jordan.
   En prenant la base $\mathcal{B} = (e_i)_{1\leqslant i\leqslant k}$ définie par $e_i = \varepsilon'^{i-1}e'_i$, $i \in [|1,k|]$, on peut faire en sorte que cette réduite contienne des ε' au lieu de 1 au-dessus de la diagonale.
2. Soit $\varepsilon = \varepsilon'$, λ_1, ..., λ_k les termes diagonaux de la matrice, N la norme infinie associée à la base $\mathcal{B}$. Alors $\|A\|_N \leqslant \max\{|\lambda_i| + \varepsilon', i \in [|1,k|]\} \leqslant r(A) + \varepsilon$.
   La restriction de N à $\mathbb{R}^k$ est alors encore une norme sur $\mathbb{R}^k$, qui vérifie toujours
   $$\boxed{\|A\|_N \leqslant r(A) + \varepsilon}.$$
   Deuxième méthode pour 2.1 et 2.2
   Notons $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ les valeurs propres complexes, éventuellement confondues, de A, rangées de façon à ce que :
   $$|\lambda_1| \leqslant |\lambda_2| \leqslant \ldots \leqslant |\lambda_k|.$$
   Comme le polynôme caractéristique est scindé sur $\mathbb{C}$, il existe une base $\mathcal{B} = (e_i)_{1\leqslant i\leqslant k}$ dans laquelle la matrice $(a_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant k}$ de A est triangulaire supérieure.
   Soit $K = \max\{|a_{i,j}|\,;\, i\neq j\}$ et α un réel strictement positif tel que $0 < \dfrac{K}{\alpha - 1} \leqslant \varepsilon$.
   Soit, pour tout vecteur x de $\mathbb{C}^k$ de coordonnées $(x_i)_{1\leqslant i\leqslant k}$ dans $\mathcal{B}$: $N(x) = \max\left\{\left|\alpha^i x_i\right|\,;\, i \in [|1,k|]\right\}$.
   $A(x) = y$ est un vecteur de coordonnées $(y_i)_{1\leqslant i\leqslant k}$ dans $\mathcal{B}$ telles que :
   $$y_i = \lambda_i x_i + \sum_{j=i+1}^{k} a_{i,j}x_j$$
   donc $\left|\alpha^i y_i\right| \leqslant |\lambda_i| \left|\alpha^i x_i\right| + \displaystyle\sum_{j=i+1}^{k} K\frac{\alpha^i}{\alpha^j}\left|\alpha^j x_j\right|$ d'où
   $$\left|\alpha^i y_i\right| \leqslant r(A)N(x) + K\left(\sum_{j=i+1}^{k}\alpha^{i-j}\right)N(x) \leqslant r(A)N(x) + K\left(\sum_{j=1}^{k-i}\alpha^{-j}\right)N(x) \leqslant \left(r(A) + \frac{K}{\alpha-1}\right)N(x)$$
   et comme ceci est valable pour tout $i \in [|1,k|]$:
   $$N(y) \leqslant (r(A)+\varepsilon)N(x) \text{ donc } \|A\|_N \leqslant r(A) + \varepsilon$$
   en notant $\|\cdot\|_N$ la norme sur $\mathrm{End}(\mathbb{C}^k)$ subordonnée à la norme N sur $\mathbb{C}^k$.
   Il ne reste qu'à restreindre à $\mathbb{R}^k$.
3. Comme $\mathbb{R}^k$ est de dimension finie, $\|\cdot\|$ est équivalente à N.
   Il existe donc $\alpha > 0$ et $\beta > 0$ tels que :
   $$\forall v \in \mathbb{R}^k, \alpha N(v) \leqslant \|v\| \leqslant \beta N(v).$$
   Alors, pour tout $v \in \mathbb{R}^k$ et tout $n \in \mathbb{N}^*$:
   $$\|A^n v\| \leqslant \beta N(A^n v) \leqslant \beta \|A\|_N^n N(v) \leqslant \frac{\beta}{\alpha}(r(A)+\varepsilon)^n \|v\|.$$
   Ainsi : $\boxed{\forall v \in \mathbb{R}^k, \forall n \in \mathbb{N}^*, \|A^n v\| \leqslant C_\varepsilon (r(A)+\varepsilon)^n \|v\|}$ en posant $\boxed{C_\varepsilon = \dfrac{\beta}{\alpha}}$.

4. Soit P le polynôme caractéristique de A. Comme A est un endomorphisme de $\mathbb{R}^k$, il s'agit d'un polynôme à coefficients réels. P est scindé sur $\mathbb{C}$, et ses racines sont réelles ou complexes conjuguées deux à deux, de modules différents de 1. On peut donc décomposer P sous la forme $P = QR$, où Q (resp. R) n'a que des racines de module strictement supérieur (resp. inférieur) à 1. Comme les racines complexes non réelles sont conjuguées deux à deux, Q et R sont encore des polynômes à coefficients réels.
   Q et R sont premiers entre eux, donc le lemme des noyaux assure que :
   $$\mathrm{Ker}Q(A) \oplus \mathrm{Ker}R(A) = \mathrm{Ker}P(A) = \mathbb{R}^k.$$
   Soit $\boxed{E^+ = \mathrm{Ker}Q(A) \text{ et } E^- = \mathrm{Ker}R(A)}$.
   E^+ et E^- sont bien stables par A et supplémentaires dans $\mathbb{R}^k$.
   Les valeurs propres de $A_{|E^+}$ (resp. $A_{|E^-}$) sont les racines de Q (resp. R), donc sont de modules strictement supérieurs (resp. inférieurs) à 1.
5. Comme toutes les valeurs propres de $A_{|E^+}$ sont de module strictement supérieur à 1, 0 n'est pas valeur propre de $A_{|E^+}$ donc $\boxed{A_{|E^+} \text{ est inversible}}$.
6. Les valeurs propres de $A_{|E^+}^{-1}$ sont les inverses des valeurs propres de $A_{|E^+}$, donc sont toutes de module strictement inférieur à 1. Ainsi :
   $$r\left(A_{|E^+}^{-1}\right) < 1 \text{ et } r\left(A_{|E^-}\right) < 1.$$
   Soit $\varepsilon > 0$ tel que $r\left(A_{|E^+}^{-1}\right) + \varepsilon < 1$ et $r\left(A_{|E^-}\right) + \varepsilon < 1$.
   D'après 2.2, il existe sur E^+ et E^- des normes N_+ et N_- adaptées telles que, pour les normes subordonnées :
   $$\left\|A_{|E^+}^{-1}\right\| \leqslant r\left(A_{|E^+}^{-1}\right) + \varepsilon < 1 \text{ et } \left\|A_{|E^-}\right\| \leqslant r\left(A_{|E^-}\right) + \varepsilon < 1.$$
   La norme $\|\cdot\|$ définie sur $\mathbb{R}^k$ par :
   $\|x\| = \max\left(N_+(x^+), N_-(x^-)\right)$ si x admet la décomposition $x^+ + x^-$ dans $E^+ \oplus E^-$
   est alors bien une norme sur $\mathbb{R}^k$, et vérifie les conditions imposées.
7. On remarque que, pour tout $v \in E^-$:
   $$\|A^n(v)\| \leqslant \left\|A_{|E^-}\right\|^n \|v\| \xrightarrow{n\to+\infty} 0 \text{ car } \left\|A_{|E^-}\right\| < 1$$
   donc $\boxed{\text{la suite } (A^n(v))_{n\in\mathbb{N}} \text{ converge vers } 0}$.
8. Soit $v \in E^+ \setminus \{0\}$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$: $v_n = A^n(v)$.
   Alors $\|v\| = \left\|\left(A_{|E^+}^{-1}\right)^n (v_n)\right\| \leqslant \left\|A_{|E^+}^{-1}\right\|^n \|v_n\|$ donc $\|v_n\| \geqslant \dfrac{1}{\left\|A_{|E^+}^{-1}\right\|^n} \|v\|$.
   Comme $\left\|A_{|E^+}^{-1}\right\| < 1$, $\dfrac{1}{\left\|A_{|E^+}^{-1}\right\|^n}$ tend vers $+\infty$ et $\|v\|$ est non nulle, donc $\boxed{(\|A^n(v)\|)_{n\in\mathbb{N}} \text{ tend vers } +\infty}$.

3 Linéarité et topologie

1. Notons $\mathcal{B} = (e_i)_{1\leqslant i\leqslant k}$ la base canonique de $\mathbb{R}^k$.
   - Soit $L \in E$, ℓ sa matrice dans la base canonique. Chaque e_i est un élément de $\mathbb{Z}^k$, donc $L(e_i)$ appartient à $\mathbb{Z}^k$, donc les coefficients de la i-ème colonne de ℓ sont dans $\mathbb{Z}$.
     Ainsi, ℓ est à coefficients dans $\mathbb{Z}$.

- Réciproquement, soit $L \in \mathrm{End}(\mathbb{R}^k)$, dont la matrice ℓ dans la base canonique est à coefficients dans $\mathbb{Z}$. Alors, pour tout $x \in \mathbb{Z}^k$ de coordonnées $x_1, \ldots, x_k$ dans $\mathcal{B}$, $L(x)$ a pour coordonnées $y_1, \ldots, y_k$ dans $\mathcal{B}$ tels que :

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_k \end{pmatrix} = \ell \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_k \end{pmatrix}.$$

Tous les coefficients y_i sont donc dans $\mathbb{Z}$: $L(\mathbb{Z}) \subset \mathbb{Z}$ et $L \in E$.

$\boxed{\text{$L$ appartient donc à E si et seulement si sa matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}^k$ est à coefficients dans $\mathbb{Z}$.}}$

2. Soit $L \in E$, ℓ sa matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}^k$. L appartient à $\mathcal{E}$ si et seulement si L^{-1} appartient à E, i.e. si et seulement si ℓ^{-1} est à coefficients entiers.
Or $\ell^{-1} = \dfrac{1}{\det \ell}{}^t\mathrm{Com}\,(\ell)$ et $\mathrm{Com}\,(\ell)$ est à coefficients dans $\mathbb{Z}$ (car ses coefficients sont des déterminants à coefficients dans $\mathbb{Z}$).
Ainsi, si $\det \ell$ vaut $+1$ ou -1, ℓ^{-1} est à coefficients entiers, donc L appartient à $\mathcal{E}$.
Si L appartient à $\mathcal{E}$, ℓ et ℓ^{-1} sont à coefficients entiers, donc $\det \ell$ et $\det \ell^{-1}$ sont des entiers tels que :
$$1 = \det I_k = (\det \ell).(\det \ell^{-1}).$$
Ainsi, $\det \ell = \det L$ est égal à $+1$ ou -1.
$\boxed{\text{$L \in E$ est donc un élément de $\mathcal{E}$ si et seulement si $\det L$ vaut $+1$ ou -1}}$.

3.
- La matrice de L dans la base canonique de $\mathbb{R}^k$ est : $\ell = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.
  Son polynôme caractéristique est :
$$P = (2 - X)(1 - X) - 1 = X^2 - 3X + 1 = \left(X - \frac{3+\sqrt{5}}{2}\right)\left(X - \frac{3-\sqrt{5}}{2}\right).$$
  Les deux valeurs propres, $\dfrac{3+\sqrt{5}}{2}$ et $\dfrac{3-\sqrt{5}}{2}$, sont donc de module différent de 1 : $\boxed{\text{$L$ est hyperbolique.}}$
- ℓ est à coefficients entiers et $\det \ell$ vaut 1, donc $\boxed{L \in \mathcal{E}}$.
- Sur $\mathbb{R}$, L ne peut être que de la forme $x \mapsto ax$, $a \in \mathbb{R}$.
  Pour qu'il soit de déterminant $+1$ ou -1, il faudrait que a vaille $+1$ ou -1. Mais a est aussi l'unique valeur propre de L, donc L ne peut pas être hyperbolique dans ce cas. $\boxed{\text{Il n'existe pas d'exemple comparable sur $\mathbb{R}$}}$.

4.
- Soit $x = (x_1, \ldots, x_k) \in \mathbb{Q}^k \cap [0,1]^k$.
  En mettant tous les x_i au même dénominateur, il existe $q \in \mathbb{N}^*$ et $(p_1, \ldots, p_k) \in [|0, q|]^k$ tels que :
$$\forall i \in [|1, k|], x_i = \frac{p_i}{q}.$$
  Soit $y = (p_1, \ldots, p_k)$ donc $x = \dfrac{1}{q}y$.

Comme $L(\mathbb{Z})$ est contenu dans $\mathbb{Z}$, $L^p(x)$ est, pour tout entier $p \in \mathbb{N}^*$, de la forme $z = \dfrac{1}{q}(z_1, \ldots, z_k)$, avec $z_i \in \mathbb{Z}$.
Le reste modulo q de z_i ne peut prendre que q valeurs (de 0 à $q-1$), donc les projetés par Π des $L^p(x)$, $p \in \mathbb{N}$, ne peuvent prendre que q^k valeurs distinctes. Ainsi, il existe deux entiers $i < j$ tels que :

$$\Pi\left(L^i(x)\right) = \Pi\left(L^j(x)\right) \text{ donc } L^j(x) - L^i(x) \in \mathbb{Z}^k.$$

De plus $L^{-1}(\mathbb{Z}) \subset \mathbb{Z}$ donc $L^{j-i}(x) - x = L^{-i}\left(L^j(x) - L^i(x)\right) \in \mathbb{Z}^k$ ce qui montre que x est périodique.

- Réciproquement, soit $x \in \operatorname{Per} L$.
Il existe $p \in \mathbb{N}^*$ tel que $L^p(x) - x = y$ soit élément de $\mathbb{Z}^k$.
L est hyperbolique, donc n'a aucune valeur propre de module 1 ; ainsi $L^p - Id_{\mathbb{R}^k}$ est inversible et :

$$x = \left(L^p - Id_{\mathbb{R}^k}\right)^{-1}(y).$$

De plus, la matrice ℓ de L dans la base canonique de $\mathbb{R}^k$ est à coefficients entiers, donc la matrice $\dfrac{1}{\det\left(\ell^p - I_k\right)}{}^t\mathrm{Com}\left(\ell^p - I_k\right)$ de $\left(L^p - Id_{\mathbb{R}^k}\right)^{-1}$ est à coefficients rationnels, et comme y est à coordonnées entières, x est à coordonnées rationnelles : $x \in \mathbb{Q}^k \cap [0,1]^k$.

Ainsi $\boxed{\operatorname{Per} L = \mathbb{Q}^k \cap [0,1]^k}$ et comme $\mathbb{Q} \cap [0,1]$ est dense dans $[0,1]$, $\boxed{\operatorname{Per} L \text{ est dense dans } [0,1]^k}$.

5. Comme toutes les normes sont équivalentes, on peut choisir une norme quelconque, et cela donnera la topologie usuelle. On prend donc une norme L-adaptée $\|\cdot\|$ comme en 2.6.
Soit $x \in \mathbb{R}^k$. Comme $\mathbb{R}^k = E^+ \oplus E^-$, il existe $(x^+, x^-) \in E^+ \times E^-$ tel que :

$$x - a = x^+ + x^-.$$

Alors : $\forall n \in \mathbb{N}, L^n(x) - L^n(a) = L^n(x-a) = L^n(x^+) + L^n(x^-)$.
On sait (cf. 2.7 et 2.8) que, lorsque n tend vers $+\infty$, $L^n(x^-)$ tend vers 0 et $\left\|L^n(x^+)\right\|$ tend vers $+\infty$ si x^+ est non nul.
Ainsi, x appartient à W_a^s si et seulement si x^+ est nul, i.e. si et seulement si $x-a$ appartient à E^- : $\boxed{W_a^s = a + E^-}$.
On remarque que, par définition, la variété instable de a pour L est la variété stable de a pour L^{-1}. Passer de L à L^{-1} revient à échanger E^+ et E^- donc $\boxed{W_a^u = a + E^+}$.

6. (a) Soit $z_0 = (1, 0, \ldots, 0)$, $\alpha = N(z_0)$ et $\eta = \inf\limits_{z \in \mathbb{Z}^k \setminus \{0\}} N(z)$.
Comme N est une norme, α est non nul.
Soit $B = \left\{z \in \mathbb{R}^k \mid N(z) \leqslant \alpha\right\}$: B est un compact de $\mathbb{R}^k$.
Par définition $\eta = \inf\left\{N(z); z \in B \cap \left(\mathbb{Z}^k \setminus \{0\}\right)\right\}$. $B \cap \left(\mathbb{Z}^k \setminus \{0\}\right)$ est un fermé dans B, donc un compact de $\mathbb{R}^k$.
N, qui est une application continue sur $\mathbb{R}^k$, atteint ses bornes sur ce compact.
En particulier, η est atteint en un point non nul, donc

$$\boxed{\eta = \inf_{z \in \mathbb{Z}^k \setminus \{0\}} N(z) \text{ est strictement positif}}.$$

(b) • d est bien une application à valeurs positives.
- Soit $(y,y') \in (\mathbb{T}^k)^2$ tel que $d(y,y')=0$.
Si x et x' sont des représentants dans $\mathbb{R}^k$ de y et y' respectivement, $x-x'$ appartient à $\mathbb{Z}^k$.
$d(y,y')=0$ impose qu'il existe des représentants x et x' tels que $x-x'=0$ donc $y=y'$.
- La définition de d est visiblement symétrique.
- On remarque que d peut aussi être définie par :

$$d(y,y') = \inf\left\{N(z) \mid z \in \mathbb{R}^k \text{ et } \Pi(z) = y-y'\right\}.$$

Soit y, y', y'' des éléments de $\mathbb{T}^k$. Alors, pour tous représentants x_1 et x_2 de $y-y'$ et $y'-y''$ respectivement, x_1+x_2 est un représentant de $y-y''$ et :

$$d(y,y'') \leqslant N(x_1+x_2) \leqslant N(x_1)+N(x_2).$$

Pour tout x_2 représentant de $y'-y''$:
$N(x_2) \geqslant d(y,y'')-N(x_1)$ donc $d(y',y'') \geqslant d(y,y'')-N(x_1)$
puis, pour tout x_1 représentant de $y-y'$:
$N(x_1) \geqslant d(y,y'')-d(y',y'')$ donc $d(y,y') \geqslant d(y,y'')-d(y',y'')$.
Finalement : $d(y,y'') \leqslant d(y,y')+d(y',y'')$ et $\boxed{d \text{ est une distance sur } \mathbb{T}^k}$.

(c) Soit $(x,x') \in (\mathbb{R}^k)^2$, $y=\Pi(x)$, $y'=\Pi(x')$. Par définition :
$d(y,y') \leqslant N(x-x')$ donc $d\left(\Pi(x),\Pi(x')\right) \leqslant N(x-x')$.
$\boxed{\Pi \text{ est 1-lipschitzienne donc continue}}$.

7. • Soit $y \in \mathbb{T}^k$, x et x' deux représentants de y dans $\mathbb{R}^k$. Alors $x-x'$ appartient à $\mathbb{Z}^k$ donc $L(x-x') = L(x)-L(x')$ appartient à $\mathbb{Z}^k$: L induit bien une application Π_L sur $\mathbb{T}^k$.
   - Par construction de F_L : $F_L\left(\Pi(x)\right) = F_L(y) = \Pi\left(L(x)\right)$ donc $F_L \circ \Pi = \Pi \circ L$.
   - Soit $y \in \mathbb{T}^k$, $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de $\mathbb{T}^k$ tendant vers y.
   Par définition de d, il existe un représentant x de y et une suite de représentants x_n de y_n tels que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers x dans $\mathbb{R}^k$ pour N.
   Comme L est continue, $\left(L(x_n)\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $L(x)$ dans $\mathbb{R}^k$, donc $\left(\Pi\left(L(x_n)\right) = F_L(y_n)\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $\Pi\left(L(x)\right) = F_L(y)$. Ainsi, F_L est continu.
   - Enfin, pour tout $y \in \mathbb{T}^k$ de représentant x dans $\mathbb{R}^k$:
   $$F_{L^{-1}}\left(F_L(y)\right) = F_{L^{-1}}\left(\Pi(L(x))\right) = \Pi\left(L^{-1}(L(x))\right) = \Pi(x) = y$$
   et de même pour $F_L \circ F_{L^{-1}}$, donc F_L est bijective, de réciproque $F_{L^{-1}}$ également continue.
   $\boxed{F_L \text{ est un homéomorphisme.}}$

8. (a) Soit $y \in \Pi(0+E^-)$ et $x \in E^-$ tel que $y=\Pi(x)$.
   On sait que $(L^n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers 0, donc $(F_L^n(y))_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers 0 dans $\mathbb{T}^k$, i.e. $d(F_L^n(y),F_L^n(0))$ tend vers 0 lorsque n tend vers $+\infty$: y appartient à $W^s(0)$.

   (b) Soit $y \in \mathbb{T}^k$ et $x \in [0,1]^k$ tel que $y=\Pi(x)$; soit $\varepsilon > 0$.
   Comme $\operatorname{Per} L$ est dense dans $[0,1]^k$, il existe $x_0 \in \operatorname{Per} L$ tel que :
   $$N(x-x_0) \leqslant \frac{\varepsilon}{2} \text{ donc } d(y,y_0) \leqslant \frac{\varepsilon}{2} \text{ en posant } y_0 = \Pi(x_0).$$
   Comme $\mathbb{R}^k = E^+ \oplus E^-$, il existe $(x^+,x^-) \in E^+ \times E^-$ tel que : $x_0 = x^+ + x^-$.
   Puisque x_0 est périodique, il existe $p \in \mathbb{N}^*$ tel que $L^p(x_0)-x_0$ soit dans $\mathbb{Z}^k$.
   Alors $F_L^p(y_0) = y_0$ donc, pour tout $n \in \mathbb{N}$: $y_0 = F_L^{np}(y_0) = \Pi\left(L^{np}(x^+)\right) + \Pi\left(L^{np}(x^-)\right)$.

Comme $(L^{np}(x^-))_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers 0, $\left(z_n = \Pi\left(L^{np}(x^+)\right)\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de points de $\Pi(0+E^+)$ qui converge vers y_0.
Pour n suffisamment grand : $d(y_0, z_n)\leqslant\dfrac{\varepsilon}{2}$ donc $d(y, z_n)\leqslant\varepsilon$.
Ainsi, $\boxed{\Pi(0+E^+) \text{ est dense dans } \mathbb{T}^k}$.

(c) En appliquant le résultat précédent à L^{-1}, on obtient que $\Pi(0+E^-)$ est dense dans $\mathbb{T}^k$ et donc que $\boxed{W^s(0) \text{ est dense dans } \mathbb{T}^k}$.
Grâce à $F_{L^{-1}}$ toujours, on en déduit que la variété instable de 0 est également dense dans $\mathbb{T}^k$.

9. Soit f une isométrie de $\mathbb{T}^k$, supposée topologiquement mélangeante.
Soit x et y deux points distincts de $\mathbb{T}^k$, $\varepsilon = \dfrac{d(x,y)}{5} > 0$.
Soit $z \in \mathbb{T}^k$, V la boule ouverte de centre z de rayon ε, U_1 (resp. U_2) la boule ouverte de centre x (resp. y) de rayon ε.
Comme f est mélangeante, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que :
$$\forall n\geqslant N, f^n(U_1)\cap V\neq \varnothing \text{ et } f^n(U_2)\cap V\neq\varnothing.$$
Soit donc $z_1 \in f^n(U_1)\cap V$ et $z_2 \in f^n(U_2)\cap V$.
Il doit exister $t_1 \in U_1$ et $t_2 \in U_2$ tels que $z_1 = f^n(t_1)$ et $z_2 = f^n(t_2)$.
Comme f est une isométrie, $d(t_1,t_2) = d(z_1,z_2)$ et V est de diamètre 2ε donc :
$$d(x,y)\leqslant d(x,t_1) + d(z_1,z_2) + d(t_2,y)\leqslant 4\varepsilon$$
ce qui est absurde. Ainsi, $\boxed{\text{une isométrie de } \mathbb{T}^k \text{ n'est pas mélangeante}}$.

10. Soit U et V deux ouverts non vides de $\mathbb{T}^k$. Soit $x \in U$, $z \in V$, $\varepsilon > 0$ tel que la boule ouverte de centre z de rayon ε soit contenue dans V.
$\Pi(0+E^+)$ est dense dans $\mathbb{T}^k$, donc il existe z_0 dans $\Pi(0+E^+)\cap B(z,\varepsilon)$.
Soit, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = F_L^{-n}(z_0)$: $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers 0.
$\Pi(0+E^-)$ est dense dans $\mathbb{T}^k$, donc il existe t dans $\Pi(0+E^-)\cap U$.
Soit alors $v_n = t + u_n$. Comme U est ouvert, v_n appartient à U pour n suffisamment grand, et $F_L^n(v_n) = F_L^n(t) + z_0$ tend vers z_0 lorsque n tend vers $+\infty$.
Pour n suffisamment grand, $F_L^n(v_n)$ appartient donc à $F_L^n(U)\cap V$. $\boxed{F_L \text{ est mélangeante}}$.

4 Un exemple presque linéaire dans $\mathbb{R}^2$

1. Soit (x',y'), (u,v), (u',v') des éléments de $\mathbb{R}^2$. On a :
$$F_{(x',y')}(u',v') - F_{(x',y')}(u,v) = \left(\frac{\alpha(u,v)-\alpha(u',v')}{\mu}, \frac{\beta(u,v)-\beta(u',v')}{\lambda}\right).$$
L'inégalité des accroissements finis donne : $\begin{cases} |\alpha(u,v)-\alpha(u',v')|\leqslant\delta\,|(u,v)-(u',v')| \\ |\beta(u,v)-\beta(u',v')|\leqslant\delta\,|(u,v)-(u',v')| \end{cases}$
donc $\left|F_{(x',y')}(u',v') - F_{(x',y')}(u,v)\right| \leqslant\dfrac{\delta}{\lambda}\,|(u,v)-(u',v')|$.
$F_{(x',y')}$ est donc lipschitzienne de rapport $a = \dfrac{\delta}{\lambda} < 1$.
Comme application contractante dans $\mathbb{R}^2$ complet, $F_{(x',y')}$ admet un unique point fixe (u,v), solution de :

$$(u,v) = \left(\frac{x' - \alpha(u,v)}{\mu}, \frac{y' - \beta(u,v)}{\lambda}\right), \text{ i.e. de } (x', y') = f(u,v).$$

Ceci étant valable pour tout couple (x', y') de $\mathbb{R}^2$, f est bijective (existence et unicité du point fixe, i.e. de l'antécédent).

f est $\mathcal{C}^1$ comme composée d'applications $\mathcal{C}^1$.

Sa différentielle en (x,y) a pour matrice, dans la base canonique de $\mathbb{R}^2$:

$$M = \begin{pmatrix} \mu + \frac{\partial \alpha}{\partial x}(x,y) & \frac{\partial \alpha}{\partial y}(x,y) \\ \frac{\partial \beta}{\partial x}(x,y) & \lambda + \frac{\partial \beta}{\partial y}(x,y) \end{pmatrix}.$$

Son jacobien est donc :

$$J(x,y) = \left(\mu + \frac{\partial \alpha}{\partial x}(x,y)\right)\left(\lambda + \frac{\partial \beta}{\partial y}(x,y)\right) - \frac{\partial \alpha}{\partial y}(x,y)\frac{\partial \beta}{\partial x}(x,y) \geqslant (\mu - \delta)(\lambda - \delta) - \delta^2$$

car toutes les dérivées partielles sont bornées par δ.

De plus : $\delta < \frac{\lambda}{2} < \frac{\mu}{2}$ donc $J(x,y) \geqslant \frac{\mu}{2}\frac{\lambda}{2} - \left(\frac{\lambda}{2}\right)^2 > 0$.

Ainsi, f définit (localement ou globalement au choix vu qu'on a déjà l'injectivité) un $\mathcal{C}^1$ difféomorphisme, et comme on sait déjà que f est bijective, $\boxed{f \text{ est un } \mathcal{C}^1\text{-difféomorphisme de } \mathbb{R}^2}$.

2. On cherche ψ telle que : $\forall x \in \mathbb{R}, \exists x' \in \mathbb{R}, (\mu x + \alpha(x, \varphi(x)), \lambda \varphi(x) + \beta(x, \varphi(x)) = (x', \psi(x')))$ ce qui est équivalent à : $\forall x \in \mathbb{R}, \psi(G_\varphi(x)) = \lambda\varphi(x) + \beta(x, \varphi(x)$.
(*) assure que $\delta(1+\gamma) < \mu$ donc, d'après 1.3, G_φ est un homéomorphisme de $\mathbb{R}$; il suffit de prendre l'application ψ définie par :
$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}, \psi(x) = \lambda\varphi\left(G_\varphi^{-1}(x)\right) + \beta\left(G_\varphi^{-1}(x), \varphi\left(G_\varphi^{-1}(x)\right)\right)}.$$

3. $G_\varphi(0) = 0$ donc $G_\varphi^{-1}(0) = 0$ et $\psi(0) = 0$.
Soit y, y' dans $\mathbb{R}$, $x = G_\varphi^{-1}(y)$ et $x' = G_\varphi^{-1}(y')$.
Comme φ est γ-lipschitzienne : $|\varphi(x) - \varphi(x')| \leqslant \gamma\,|x - x'|$
et $\gamma < 1$ donc $|(x, \varphi(x)) - (x', \varphi(x'))| = |x - x'|$.
D'après l'inégalité des accroissements finis :
$$|G_\varphi(x) - G_\varphi(x')| \geqslant \mu\,|x - x'| - \delta\,|(x,\varphi(x)) - (x', \varphi(x'))| \geqslant (\mu - \delta)\,|x - x'|\,.$$
Alors $|\psi(y) - \psi(y')| \leqslant \lambda\,|\varphi(x) - \varphi(x')| + |\beta(x, \varphi(x)) - \beta(x, \varphi(x'))| \leqslant (\lambda\gamma + \delta)\,|x - x'| \leqslant \frac{\lambda\gamma + \delta}{\mu - \delta}\,|y - y'|$.
Or : $\frac{\lambda\gamma + \delta}{\mu - \delta} \leqslant \gamma \Leftrightarrow \delta \leqslant \frac{(\mu - \lambda)\gamma}{1 + \gamma}$ ce qui est bien vérifié ici.
Ainsi ψ est γ-lipschitzienne et $\boxed{f_* \text{ est bien une application de } Li_\gamma \text{ dans lui-même}}$.

4. Soit $x \in \mathbb{R}$, $y = G_\varphi(x)$, $y' = G_{\varphi'}(x)$, $\psi = f_*(\varphi)$ et $\psi' = f_*(\varphi')$. Alors :
$|f_*(\varphi)(G_\varphi(x)) - f_*(\varphi')(G_\varphi(x))| = |\psi(y) - \psi'(y)| \leqslant |\psi(y) - \psi'(y')| + |\psi'(y') - \psi'(y)|$.
Comme ψ' est γ-lipschitzienne : $|\psi'(y') - \psi'(y)| \leqslant \gamma\,|y' - y|$
et $|y' - y| = |\alpha(x, \varphi'(x)) - \alpha(x, \varphi(x))| \leqslant \delta\,|\varphi(x) - \varphi'(x)|$.
On a : $\psi(y) = \lambda\varphi(x) + \beta(x, \varphi(x))$ et $\psi'(y') = \lambda\varphi'(x) + \beta(x, \varphi'(x))$
donc $|\psi(y) - \psi'(y')| \leqslant \lambda\,|\varphi(x) - \varphi'(x)| + \delta\,|\varphi(x) - \varphi'(x)|$.
Ainsi : $\boxed{|f_*(\varphi)(G_\varphi(x)) - f_*(\varphi')(G_\varphi(x))| \leqslant (\lambda + \delta + \gamma\delta)\,|\varphi(x) - \varphi'(x)|}$.

5. Lorsque x décrit $\mathbb{R}^*$, $G_\varphi(x)$ décrit également $\mathbb{R}^*$. Ainsi :

$$d_\gamma\left(f_*(\varphi), f_*(\varphi')\right) = \sup_{x\neq 0}\left|\frac{f_*(\varphi)(G_\varphi(x)) - f_*(\varphi')(G_\varphi(x))}{G_\varphi(x)}\right|.$$

   Or, pour tout $x \in \mathbb{R}$: $|G_\varphi(x)| \geqslant (\mu-\delta)\,|x|$
   donc $\dfrac{|f_*(\varphi)(G_\varphi(x)) - f_*(\varphi')(G_\varphi(x))|}{|G_\varphi(x)|} \leqslant \dfrac{\lambda+\delta(1+\gamma)}{\mu-\delta}\left|\dfrac{\varphi'(x)-\varphi(x)}{x}\right|$.
   Ainsi : $d_\gamma\left(f_*(\varphi), f_*(\varphi')\right) \leqslant \dfrac{\lambda+\delta(1+\gamma)}{\mu-\delta} d_\gamma(\varphi,\varphi')$.
   Or : $\dfrac{\lambda+\delta(1+\gamma)}{\mu-\delta} < 1 \Leftrightarrow \delta < \dfrac{\mu-\lambda}{2+\gamma}$ ce qui est bien le cas ici.
   f_* est donc une application contractante dans l'espace complet (Li_γ, d_γ) : elle admet un unique point fixe φ^+, qui est une application dont $\boxed{\text{le graphe horizontal est invariant par } f}$.

6. φ^+ appartient à Li_γ donc $\left|\varphi^+(x)\right| \leqslant \gamma\,|x|$ d'où, puisque $\gamma < 1$: $\left|\left(x, \varphi^+(x)\right)\right| = |x|$.
   De plus, $\left|f(x,\varphi^+(x))\right| \geqslant \left|\mu x + \alpha(x,\varphi^+(x))\right|$ (c'est le maximum des deux coordonnées donc supérieur à la première)
   et $\left|\alpha(x,\varphi^+(x))\right| \leqslant \delta\left|\left(x,\varphi^+(x)\right)\right| \leqslant \delta\,|x|$ donc $\boxed{\left|f(x,\varphi^+(x))\right| \geqslant (\mu-\delta)\,|x| = (\mu-\delta)\left|(x,\varphi^+(x))\right|}$.

7. Pour δ suffisamment petit, $\mu - \delta > 1$.
   Soit $x \in \mathbb{R}$. Comme le graphe horizontal de φ^+ est stable par f, $f(x,\varphi^+(x))$ est encore un élément de H_{φ^+} donc 4.6 donne par récurrence :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \left|f^n(x,\varphi^+(x))\right| \geqslant (\mu-\delta)^n\left|(x,\varphi^+(x))\right|.$$

   Comme f est bijective, ceci donne aussi, en l'appliquant à $f^{-n}(x,\varphi^+(x))$ qui est toujours un élément du graphe horizontal de φ^+ :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \left|f^{-n}(x,\varphi^+(x))\right| \leqslant (\mu-\delta)^{-n}\left|(x,\varphi^+(x))\right|$$

   qui tend vers 0 lorsque n tend vers $+\infty$ donc $\boxed{(x,\varphi^+(x)) \text{ est dans la variété instable de } (0,0)}$.

5 Différentiabilité des fonctions lipschitziennes

1. On prend $x_n = x + 2^{-n}$ donc $\Delta_{x_n}\varphi = \dfrac{(2^{-n}, \varphi(x+2^{-n}) - \varphi(x))}{|(2^{-n}, \varphi(x+2^{-n}) - \varphi(x))|}$.
   $\Delta_{x_n}\varphi$ est de norme 1 par construction ; cette suite bornée admet une sous-suite convergente, et quitte à ne garder que la sous-suite, il existe donc $v \in \mathbb{R}^2$ tel que $\lim\limits_{n\to+\infty} \Delta_{x_n}\varphi = v$.
   Comme φ est γ-lipschitzienne : $\left|\varphi(x+2^{-n}) - \varphi(x)\right| \leqslant \gamma 2^{-n}$
   donc $2^{-n} \leqslant |(x_n, \varphi(x_n)) - (x, \varphi(x))| \leqslant \alpha 2^{-n}$ où $\alpha = \max(1,\gamma)$.
   Ainsi la première coordonnée de $\Delta_{x_n}\varphi$ est comprise entre $\dfrac{1}{\alpha}$ et 1, mais ne peut pas tendre vers 0 : $pr_1(v)$ est non nul. Alors $pr_1(T_x\varphi)$ contient au moins $pr_1(\mathbb{R}v) = \mathbb{R}$ et c'est contenu dans $\mathbb{R}$ par construction donc : $\boxed{pr_1(T_x\varphi) = \mathbb{R}}$.

2. On note pr_2 la projection sur la deuxième coordonnée.
   Pour tout (x, y) : $|\varphi(y) - \varphi(x)| \leqslant \gamma\,|x - y|$ donc pour toute suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de limite x telle que $\Delta_{x_n}\varphi$ ait une limite v :

$$|pr_2(\Delta_{x_n}\varphi)| \leqslant \gamma\,|pr_1(\Delta_{x_n}\varphi)|$$

   donc, à la limite, v est élément de H^γ : $\boxed{T_x\varphi \subset H^\gamma}$.

3. ϕ peut être prolongée par continuité en 0 par $\phi(0) = 0$.
   ϕ est dérivable sur $\mathbb{R}^*$. Par parité, on peut limiter l'étude à $\mathbb{R}^+$. On a :

$$\phi'(x) = \frac{1}{2}\sin(\ln x) + \frac{1}{2}\cos(\ln x) = \frac{\sqrt{2}}{2}\sin(\ln x + \frac{\pi}{4})$$

   donc ϕ' est bornée par $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

   D'après l'inégalité des accroissement finis, $\boxed{\phi \text{ est dans } Li_\gamma \text{ pour } \gamma = \dfrac{\sqrt{2}}{2}}$.

   Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite convergente vers 0 :

$$\Delta_{x_n}\phi = \frac{\left(x_n, \dfrac{x_n}{2}\sin(\ln|x_n|)\right)}{\left|\left(x_n, \dfrac{x_n}{2}\sin(\ln|x_n|)\right)\right|}.$$

   Comme $\left|\dfrac{x_n}{2}\sin(\ln|x_n|)\right| \leqslant |x_n|$, la norme du dénominateur est $|x_n|$ et :

$$\Delta_{x_n}\phi = \pm(1, \frac{1}{2}\sin(\ln|x_n|)).$$

   La limite si elle existe est donc dans $H^{1/2}$.
   Pour tout $(u, v) \in H^{1/2}$ tel que $u \neq 0$, il existe θ tel que $\dfrac{1}{2}\sin\theta = \dfrac{v}{u}$.
   Soit, pour tout $n \in \mathbb{N}$: $x_n = \exp(\theta - 2n\pi)$.
   $(x_n)_{n\in\,\mathbb{N}}$ tend vers 0 et $(\Delta_{x_n}\phi)_{n\in\,\mathbb{N}}$ a pour limite $\left(1, \dfrac{v}{u}\right)$, donc $(u, v) \in T_0\phi$.
   Ainsi, $\boxed{T_0\phi = H^{1/2}}$.

4. Pour $\gamma \leqslant 1$, la norme $|(x, \varphi(x)) - (y, \varphi(y))|$ du dénominateur est égale à $|x - y|$ donc :

$$\Delta_y\varphi = \pm\left(1, \frac{\varphi(y) - \varphi(x)}{y - x}\right)$$

   le signe $\pm$ dépendant de la position relative de x et y.
   Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite convergente vers x par valeurs supérieures par exemple.
   $(\Delta_{x_n}\phi)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée donc admet une sous-suite convergente.
   La limite est alors le seul vecteur $(1, v)$ de $T_x\varphi$ de première coordonnée 1. La suite $(\Delta_{x_n}\phi)_{n\in\mathbb{N}}$ est donc une suite bornée ayant une unique valeur d'adhérence $(1, v)$: elle converge vers $(1, v)$, ce qui montre que, pour toute suite de $]x, +\infty[$ convergente vers x, $\left(\dfrac{\varphi(x_n) - \varphi(x)}{x_n - x}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers v.

Le critère séquentiel assure alors que : $\lim\limits_{h \to 0^+} \dfrac{\varphi(x+h) - \varphi(x)}{h} = v$.
φ est dérivable à droite, de dérivée v.
On fait la même chose à gauche : pour toute suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de $]-\infty, x[$ convergente vers x, $\dfrac{\varphi(x_n) - \varphi(x)}{|x_n - x|} = \dfrac{\varphi(x_n) - \varphi(x)}{x - x_n}$ converge vers $-v$, donc $\lim\limits_{h \to 0^-} \dfrac{\varphi(x+h) - \varphi(x)}{h} = v$.
Alors $\boxed{\varphi \text{ est dérivable en } x}$, et $\varphi'(x) = v$.

Rapport des correcteurs

Ce problème présente une introduction aux systèmes dynamiques avec un comportement chaotique

- Étude des itérations d'une application, d'abord dans le cas d'une application linéaire hyperbolique sur $\mathbb{R}^k$ puis en compactifiant sur le tore lorsque l'application et son inverse préservent le réseau $\mathbb{Z}^k$

- Étude du mélange topologique et de la densité des orbites périodiques. La fin aborde le cas non linéaire et donne des outils pour contrôler la régularité.

La plupart des candidats ont été en mesure d'aborder plusieurs parties du problème. Le mélange analyse/algébre linéaire, topologie et calcul différentiel ne semble pas avoir soulevé de trop grandes difficultés comme en attestent les résultats. Les questions 2.5 et 3.1 et 3.3.a ont été correctement traitées par la quasi-totalité des candidats.

Partie 1

Dans la première question beaucoup de copies ne s'assurent pas de l'existence de cette distance et oublient de tester certaines des conditions. Dans la question 1.2 beaucoup pensent que l'existence d'une limite simple dans (Li_γ, d_γ) suffit pour prouver la complétude alors qu'il faut prouver la convergence pour la distance d_γ. Le jury a été surpris de constater que les fonctions lipschitziennes sont souvent considérées comme différentiables. Par ailleurs le théorème des accroissements finis ne semble pas d'un usage largement répandu.

Partie linéaire

Force est de constater que l'algèbre linéaire est mal maitrisée La notion de norme subordonnée n'est pas bien connue et les questions 2.2 et 2.3 sont assez rarement bien traitées.

Au 2.4, il est surprenant de lire assez souvent que évidemment E est la somme des sous-espaces propres (voire la réunion !). Les sous espaces stables d'un endomorphisme sont d'ailleurs souvent confondus avec les sous espaces propres. D'autre part les conséquences pour l'endomorphisme réel du travail effectué dans le corps des nombres complexes sont rarement explicités correctement.

Partie linéarité et topologie

Comme déjà mentionné, le début de cette partie est assez bien compris et largement traité . Le jury a été particulièrement attentif à la qualité des justifications présentées, appréciant peu les assertions de type « il est clair que l'endomorphisme est hyperbolique ». La question 3.4 des points périodiques était plus difficile mais certains ont correctement prouvé les deux inclusions. Dans la question 3.5 les distances (comme dans tout le problème) considérées proviennent de normes (le résultat se géné ralise à la classe de toutes les distances qui leur sont bilipschitz-équivalentes).

La question 3.6.2 a révélé que les candidats ont beaucoup de difficultés à manipuler les inf. On a vu des choses catastrophiques où les inf sont traités comme des sup. Les difficultés sont ici à des niveaux élémentaires. La fin du 3 était sans doute la partie la plus poussée du problème. Elle a cependant été abordée avec succès par quelques candidats.

Partie 4

Les candidats ont surtout étudié la première question. Plusieurs ont correctement utilisé le théorème d'inversion locale. Mais rares sont ceux qui ont vu que l'on pouvait appliquer le théorème du point fixe à F pour prouver que f est une bijection.

Partie 5

Cette partie a été construite de manière à être indépendante du reste du problème (bien qu'en fait il s'agit de techniques utilisées pour comprendre la régularité des variétés stables). Elle n'a été que minoritairement abordée ce qui est un peu dommage vu la relative simplicité de certaines questions.

Le début du 5.3 montre des difficultés surprenantes à ce niveau pour étudier une fonction assez simple d'une variable réelle.

Remarques des examinateurs d'oral

6 Épreuves orales d'algèbre et analyse

Dans l'ensemble les recommandations du rapport 2003 sont encore d'actualité. Nous ne proposons que peu de changements.

6.1 Organisation des épreuves

Les modalités, mises en place au concours 2001, ont cette année encore donné satisfaction et sont reconduites pour les sessions à venir. Elles sont décrites ci-après de manière détaillée, tenant compte de l'expérience acquise.

À l'issue de la période de préparation, le jury fait procéder à la photocopie des plans préparés par les candidats. Ces derniers sont manuscrits, comportent trois pages A4 *au maximum* et possèdent une marge de 1 cm sur tous les côtés afin d'éviter tout problème lors de la photocopie. Les plans peuvent être complétés par des planches de figures.

Le candidat *peut utiliser sa copie du plan pendant l'épreuve* et pourra utiliser les notes manuscrites produites durant la préparation, pendant la première phase de l'interrogation dite « argumentation et présentation du plan ».

Le plan écrit n'est ni une énumération de paragraphes, ni un exposé complet avec développement des démonstrations. Il définit avec précision les notions introduites, donne les *énoncés complets* des résultats fondamentaux, cite des exemples et des applications. *Le plan doit être maîtrisé*, c'est à dire que les résultats exposés doivent être compris ainsi que l'organisation d'ensemble. Il est souhaitable que le candidat connaisse dans leurs grandes lignes les démonstrations des résultats figurant au programme du concours : le jury pourra appliquer ce critère pour évaluer la maîtrise du plan. C'est au candidat de circonscrire son plan, notamment en ce qui concerne les énoncés débordant largement le cadre du programme.

L'épreuve orale s'organise en trois temps, prévus pour une durée totale d'un maximum de 50 mn.

Première partie : présentation du plan

Le candidat est convié à utiliser son temps de parole, 8 minutes maximum, pour présenter, argumenter et mettre en valeur son plan.

Il s'agit d'une épreuve orale, il est donc inutile de recopier le plan au tableau, dans la mesure où le jury possède une copie du texte. Il est souhaitable que le candidat utilise son temps de parole pour expliquer de façon synthétique les articulations principales de son plan. Les détails techniques, s'ils sont clairement écrits dans le plan, pourront ne pas être repris oralement. Le candidat peut faire un bref exposé introductif et commenter utilement ensuite ses résultats principaux, les outils développés, l'organisation d'ensemble et mettre en perspective les méthodes utilisées. Il peut être utile de consacrer du temps à un exemple pertinent qui éclaire la problématique de la leçon, à faire usage du tableau pour illustrer ses propos. La présentation et la justification orale du plan sont des points importants d'appréciation.

À la fin de cette présentation, le jury peut questionner brièvement le candidat. Ce temps de dialogue permet au candidat de préciser certains aspects du plan, de développer l'argumentation et de justifier certains choix. On peut aborder quelques points techniques sans entrer dans des détails qui retarderaient le début du développement. Le jury ne cherche pas à déstabiliser le candidat.
La discussion approfondie s'effectue de préférence après le développement, en début de troisième partie.

Deuxième partie : le développement

Le candidat soumet au jury une liste de plusieurs points (deux au minimum, mais trois sont appréciés) qu'il propose de développer. Ceux-ci peuvent être soit la démonstration d'un théorème, soit la présentation d'un exemple significatif, soit le développement détaillé d'une partie délimitée du plan.
La pertinence de tous les développements proposés, *leur adéquation au sujet* et leur niveau de difficulté sont des éléments essentiels de la notation. Les candidats veilleront à proposer des développements qui permettent de mettre en valeur leur maîtrise technique, sans excéder leur capacité, à en faire un exposé clair et complet dans le temps imparti. Les développements manifestement hors sujet ou en dessous du niveau exigible de l'agrégation sont pénalisés par le jury.

Le jury choisit parmi ces points le thème d'un exposé. Le jury refusera d'avantager par son choix de développement le candidat qui a concentré sa préparation sur un seul développement substantiel et intéressant, par rapport à ceux qui ont réellement préparé les deux ou trois développements demandés.

Le candidat dispose d'au plus 15 minutes pour ce développement détaillé, qui doit comprendre toutes les explications nécessaires à la compréhension du jury. Le candidat peut adopter un rythme rapide, mais ne doit pas perdre sciemment son temps. On s'attend à ce que le candidat expose sans le support de ses notes (sauf exception éventuelle sur les énoncés très techniques, auquel cas le candidat sera convié par le jury à consulter ses notes si le besoin se fait sentir). La clarté de cet exposé, l'aisance et la sûreté avec lesquelles il est présenté constituent un facteur important d'appréciation.

L'exposé doit être complet, sans suppression d'étapes intermédiaires, ni report d'argumentation techniques dans des résultats *ad hoc* admis. En particulier la technique qui consiste à admettre un « lemme prélimaire » qui contient toute la difficulté de la preuve, est sanctionnée. Le jury peut intervenir durant le développement pour une précision, une correction ou une justification. L'intervention éventuelle du jury ne donne pas lieu à une extension de la durée totale de l'exposé.

Au terme du développement le jury peut poser des questions sur l'exposé pour s'assurer de la maîtrise et de la compréhension du sujet abordé.

Troisième partie : questions et dialogue

L'exposé est suivi d'une discussion au cours de laquelle le jury s'assure de la solidité des connaissances du candidat sur les questions précédemment abordées (plan, exposé) ou sur tout autre point en rapport avec le sujet et figurant au programme de l'oral. Un ou plusieurs exercices peuvent être proposés par le jury.

Durant cette partie, les exercices et questions posés permettent d'évaluer les réactions et capacités techniques des candidats dans un champ vierge. Le candidat doit donc s'attendre à ce qu'un dialogue s'établisse, lui permettant de profiter de suggestions si le besoin apparaît au jury. Il peut adopter un style moins formalisé que dans le développement, s'appuyer sur le plan : la priorité est ici à l'élaboration des idées, à la méthode d'appréhension des problèmes mathématiques.

Globalisation du temps de dialogue avec le jury. Le jury pourra répartir les temps réservés au dialogue avec le candidat (à la conclusion du plan et dans la troisième partie) comme il l'entend. La notation tient compte des qualités évaluées au cours de ces dialogues et non d'une répartition stricte par période.

6.2 Remarques détaillées sur les épreuves orales

Comportement général en algèbre et analyse

Le jury constate avec satisfaction une augmentation du nombre de bons candidats et de candidats bien préparés. En revanche, des candidats très faibles, ou n'ayant pas compris les exigences de l'oral, continuent de réussir à passer le cap de l'écrit.

Les candidats présentent presque tous un texte construit et deux développements associés (les candidats ne présentant qu'un développement sont très rares).
Ils ne se laissent plus surprendre par le temps ni pendant leur préparation ni pendant leur présentation.

Le plan photocopié. Dans l'ensemble, les plans photocopiés donnent satisfaction. Ils sont bien écrits, tiennent en trois pages comme demandé. Rappelons que le candidat doit *laisser une marge pour la photocopie* de 1 cm environ. Ce n'est pas toujours le cas, bien que cela soit rappelé aux candidats lors des tirages.

Nous confirmons que le plan doit tenir en trois pages maximum et que la limite de deux pages n'est pas exigée. D'autre part les notes écrites de la préparation sont bien sûr autorisées pendant la présentation du plan.

La présentation du plan. Cette année, et mieux que les années précédentes, les présentations de la quasi-totalité des candidats tiennent en 8 minutes. Ce qui montre qu'ils sont dans l'ensemble bien préparés.
La défense du plan est un élément non-négligeable dans la note finale ; or, le plus souvent, cette partie de l'oral reste une simple paraphrase du texte que le jury a déjà sous les yeux.
On attend que le candidat ait un avis sur les choix qu'il a faits, sur l'ordre dans lequel il a présenté les choses, sur les liens entre les différentes parties, etc.

Principaux Défauts :
- Le candidat relit de manière monotone son plan *in extenso*, avec tous les détails. Cela n'a pas grand intérêt, car le jury dispose déjà de la copie du texte.

- Les plans qui se veulent exhaustifs. On rappelle que ce n'est pas le but de cette épreuve et que cela nuit certainement au candidat, car il est alors très difficile de dégager des grands axes de synthèse ou de mettre en valeur le travail de réflexion personnelle du candidat. Mieux vaut faire des choix et les expliquer.
- Le candidat n'arrive pas à faire une synthèse, ni à mettre en perspective résultats et méthodes. Il ne décolle pas de son plan qu'il a souvent recopié ou appris lors de la préparation. Il passe trop de temps à introduire les notions de base et n'a plus le temps de développer les thèmes plus profonds de la leçon.

Principales Qualités :

- Le candidat fait une synthèse de son texte, sans s'attarder sur les détails inutiles ou élémentaires. Il explique les résultats importants, ajoute oralement des précisions qui ne figurent pas dans le texte. Par exemple, il explique que telle hypothèse du théorème est nécessaire en citant un contre-exemple. Il prend la craie pour expliquer un exemple pertinent, sans perdre de temps. Il explique comment utiliser ses résultats pour résoudre d'autres problèmes mathématiques.
- Le candidat explique l'articulation de son plan, la finalité et les difficultés principales rencontrées. Il fait part de ses réflexions sur le sujet et la manière dont il a compris les choses.

Le développement. Voici quelques remarques qui portent sur le choix des points proposés en développement et sur la présentation du point choisi par le jury.

Les propositions de développement :

- Il importe que tous les développements proposés soient en rapport avec le sujet de la leçon. Le hors-sujet est pénalisé ainsi que les développements de niveau trop faible.
- La technique qui consiste à admettre un lemme préliminaire qui vide de sa substance le développement est encore une fois sévèrement sanctionnée.
- Il importe que les développements proposés soient suffisamment différenciés. Il arrive relativement souvent que le deuxième développement proposé soit en fait un cas particulier du premier.
- Le jury n'est pas dupe des développements « forcés » ; il arrive que le candidat choisisse un développement intéressant et dans le sujet, puis un second moins intéressant, et à moitié hors-sujet ; dans ce cas, le jury peut demander des détails sur les deux développements, et, dans tous les cas, tiendra compte du côté « forcé » dans son appréciation finale.
- Il importe aussi de veiller à l'adéquation entre les développements proposés et le niveau du candidat. Ceci est vrai dans les deux sens. Un développement trop ambitieux peut comporter des risques, en particulier s'il n'aboutit pas. Mais s'il est bien maîtrisé, il peut aboutir à une excellente note. En revanche, un candidat moyen aura tout intérêt à choisir un développement qui met en valeur ses qualités d'exposition et sa compréhension satisfaisante d'un sujet préparé. Cependant, un développement vraiment trop élémentaire, ou trop court, et trop peu en rapport avec le programme de l'agrégation, n'obtiendra qu'une note assez basse, même s'il est parfaitement effectué.

L'exposé :

- On veillera à ce que les développements soient présentés de manière structurée. Il peut être utile de prendre quelques instants pour expliquer la stratégie de la preuve, donner brièvement les idées et les étapes. Cela éclaire les membres du Jury, et montre que le candidat maîtrise son sujet et n'a pas juste appris par cœur son développement, sans discernement.
- Le jury attend que le candidat soit capable de détailler les différents passages de sa démonstration en profondeur, de l'appliquer à un exemple simple, d'en comprendre les cas particuliers, *etc.*
- Le jury apprécie particulièrement que les candidats aient une opinion sur ce qu'ils exposent ; par exemple, comme il l'a entendu à propos de l'équation de la chaleur : « On pourrait utiliser un principe du maximum ; mais je préfère utiliser des considérations d'énergie qui me paraissent plus naturelles ici. »
- Comme les années précédentes, le jury n'a pas de peine à distinguer les candidats qui ont suivi une préparation méthodique et complète de ceux, fussent-ils intrinsèquement brillants, qui découvrent les thématiques de l'agrégation le jour de l'oral.

Autres remarques générales

- L'illustration d'un raisonnement par un dessin n'est le plus souvent obtenue qu'à la demande expresse du jury ; c'est fort dommage, car certaines preuves (théorème de projection sur un convexe par exemple) ne se trouvent, ou ne se comprennent vraiment, qu'avec un dessin, et le fait qu'un tel dessin ne « parle » pas au candidat est préoccupant.
- Les candidats gagneraient à utiliser plus systématiquement le tableau pendant le dialogue avec le jury, notamment à écrire les questions de ce dernier ; cela pourrait les aider à réfléchir.

6.2.1 Oral d'Algèbre

1. **Décomposition de Dunford (Jordan) :**
   - La décomposition de Dunford suscite encore des confusions lors de son application sur un exemple concret.

     Très peu de candidats comprennent vraiment le théorème de Dunford : dans l'écriture $A = D + N$, la matrice D est *diagonalisable*, non nécessairement *diagonale*. Les futurs candidats pourront méditer avec fruit l'exemple suivant : $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$.
   - Il est bon d'indiquer que D et N sont des polynômes de A.
   - Il existe un algorithme inspiré de la méthode de Newton pour obtenir la décomposition de Dunford (Jordan) une fois connu le polynôme minimal. Cela évite de calculer les valeurs propres.
   - Les candidats n'hésitent plus à citer la réduction de Jordan mais ignorent la forme précise des blocs de Jordan. Ceci les conduit à toutes sortes d'énoncés hasardeux d'unicité.
   - Peu de candidats s'interrogent sur l'existence d'une décomposition de Dunford sur $\mathbb{R}$.
2. **Sous-espaces stables :**
   La leçon est difficile et les candidats manquent d'outils. Toutefois cette leçon est mieux traitée que les années passées : les candidats ont compris qu'elle est distincte des leçons de réduction. De façon générale, le jury est toujours heureux d'écouter une leçon qui, même imparfaite, témoigne d'un effort de *réflexion personnelle*, plutôt qu'un plan recopié sans

discernement dans un ouvrage. Pour les bons candidats, on peut penser à traiter un peu de théorie des représentations, ou la description de tous les sous-espaces vectoriels stables dans le cas cyclique (on peut faire une analogie avec les sous-groupes de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$) ou dans le cas diagonalisable.

3. **Leçon formes quadratiques :**
   - Le cas des formes quadratiques sur le corps $\mathbb{C}$ est rarement traité par les candidats.
   - L'algorithme de Gauss doit être présenté dans la leçon ; dans le cas $K = \mathbb{R}$, le lien avec la signature doit être fait.
4. **Groupes finis**

   Cette leçon a souvent donné lieu à des pseudo-cours trop théoriques.
5. **Corps finis :**
   - Les candidats citent, voire proposent en développement, le théorème de Wedderburn *tout corps fini est commutatif* mais ne connaissent généralement pas de corps infinis non commutatifs.
   - Les candidats évoquent l'existence des corps finis à p^n éléments, mais la description précise de $\mathbb{F}_4$ suscite des affirmations saugrenues.
6. **Barycentre - Convexité**

   Les candidats négligent les barycentres et ne traitent que la convexité, la leçon devenant une leçon d'analyse.

   Cette leçon doit être vue comme *Barycentres et applications* et porte essentiellement sur la géométrie. Un barycentre n'est pas forcément à coefficients positifs ! !
7. **Divers**
   - Le développement *Décomposition polaire* est proposé par les candidats dans pratiquement toutes les leçons d'algèbre linéaire et bilinéaire (et ne parlons pas de Dunford !). Le jury est sensible à une certaine originalité dans le choix des exposés et sanctionnera le hors-sujet. Par exemple, la décomposition polaire ne peut pas figurer dans la leçon polynômes d'endomorphismes au seul prétexte que $\sqrt{f^\star f}$ est un polynôme en $f^\star f$!
   - Le développement *Théorème des extrema liés* n'est pas très adapté à la leçon *Dimension des espaces vectoriels.*
   - Le jury reste perplexe quand un candidat, après avoir exposé la réduction de Jordan d'un endomorphisme nilpotent $f \neq 0$, se révèle incapable de montrer que $\mathrm{Ker} f \cap \mathrm{Im}\, f \neq \{0\}$; ou quand un candidat montre l'irréductibilité des polynômes cyclotomiques en passant dans le corps $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$, mais ne sait pas expliquer l'importance du choix de p premier.

6.2.2 Oral d'Analyse

Généralités : Cette année, le jury a été à peu près unanime à trouver que la préparation des candidats était bonne, et leur niveau d'ensemble satisfaisant. En particulier, ces derniers hésitent moins que l'an dernier à choisir dans leur couplage la leçon la plus ambitieuse (méthodes hilbertiennes, fonctions holomorphes, théorèmes de point fixe, etc.), ce qui leur permet parfois d'avoir de très bonnes notes, qui seraient peut-être plus difficiles à obtenir sur un sujet plus élémentaire. On note aussi un effort vers la partie « exemples et applications », très importante aux yeux du jury.

On voit quand même une (petite) catégorie de candidats qui proposent des leçons d'un niveau ridiculement bas (par exemple, une leçon sur l'indépendance des variables aléatoires culminant avec le jet de deux dés ...).

Toutefois, les remarques générales ou techniques suivantes indiquent des directions dans lesquelles les candidats pourraient utilement améliorer leur préparation.

1. **À propos de l'intégration, des fonctions analytiques**
   - Un certain nombre de candidats se placent dans le cadre de l'intégrale de Riemann pour aborder des problèmes de dérivation d'intégrales dépendant d'un paramètre.

     Il en résulte des développements longs et fastidieux, probablement inspirés d'ouvrages anciens. Ce genre de problème est bien plus aisément traité au moyen de l'intégrale de Lebesgue.

     Se placer dans le cadre de l'intégrale de Lebesgue permet parfois des preuves beaucoup plus simples de certains résultats de régularité ou de comportement asymptotique pour des intégrales dépendant d'un paramètre.
   - De même, il est plus facile de démontrer que telle fonction définie par une somme ou une intégrale est holomorphe plutôt que de démontrer pas-à-pas qu'elle est de classe C^∞...
2. **Probabilités**

   Les candidats restent encore très timorés devant les leçons de probabilités, et les choisissent très rarement. Pourtant, préparer soigneusement ces leçons pourrait être, au moins pour ceux ayant choisi l'option Probabilités, un complément très utile à la préparation de la troisième épreuve d'oral.
3. **Prolongement de fonctions, fonction Γ**
   - La leçon *Prolongement de fonctions* peut être l'occasion d'aborder des thèmes aussi variés que le prolongement des fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ sur un intervalle $]a, b]$, le prolongement des fonctions Gamma et Zeta, l'analycité. La richesse de ce sujet devrait inciter les candidats à la choisir plus souvent.
   - Quand on définit la fonction $\Gamma(x)$ par une intégrale, pour $x > 0$, le prolongement analytique naturel dans le demi-plan Re $z > 0$ est la même intégrale, où la variable réelle x est remplacée par la variable complexe z. Si l'on veut prolonger par la formule d'Euler, il faut donner une motivation : par exemple, le prolongement méromorphe de Γ au delà du demi-plan droit ; ou bien la non-nullité de Γ, qui n'a rien d'évident sur la forme intégrale.
4. **Attention au hors sujet !**
   - Les candidats font souvent du « hors-sujet » ; en particulier, dans la leçon « *problèmes d'interversion de limites* », ils ont tendance à intervertir un peu n'importe quoi ; par exemple, les théorèmes de Tauber, Hardy-Littlewood, ou Fubini, ne relèvent pas naturellement d'un problème d'interversion de limites, et leur apparition dans cette leçon demande à être argumentée.
   - Ce hors-sujet est particulièrement net dans la leçon « *illustrer par des exemples et des contre-exemples la théorie des séries numériques* », qui porte bien son titre : on n'attend nullement un cours de base sur les séries numériques et les « règles » qui s'y rattachent, mais bel et bien des exemples et des contre-exemples significatifs. On peut ainsi penser aux lemmes de du Bois-Reymond, de Riemann, inégalité de Carleman, existence de

séries convergentes à termes positifs u_n telles que nu_n ne tende pas vers zéro, rôle de la monotonie des u_n, etc.

- Les candidats ont souvent des « jokers » de haut niveau (théorèmes de John, Hardy-Littlewood, Stampacchia, etc.), qu'ils cherchent à placer un peu partout ; cela n'est pas interdit, mais devrait être davantage argumenté, avec en particulier un éclairage différent sur le joker en fonction du contexte dans lequel il est utilisé.

5. **Du bon usage des ouvrages**
   - Les livres utilisés demandent parfois à être complétés, voire à être corrigés, lorsqu'ils comportent des coquilles ; ainsi, il est absurde de parler de convergence quadratique dans la méthode de Newton, et juste après, d'une erreur à la n-iéme étape de l'ordre de ε^{2n}, alors qu'il faut bien sûr écrire ε^{2^n}, et que « le ε^{2n} » constitue évidemment une erreur typographique de la référence.
   - Il y a un devoir de « prise de recul » vis-à-vis des documents écrits utilisés, faute de quoi on assiste à des incohérences, voire des erreurs, dans les plans : par exemple il est incohérent, dans la leçon « espaces complets » de donner le critère de complétude d'un espace normé par séries absolument convergentes, puis de commencer la preuve de la complétude de L^∞ en extrayant d'une suite de Cauchy (φ_n) une sous-suite (φ_{n_k}) telle que $||\varphi_{n_k} - \varphi_{n_{k-1}}|| \leqslant 2^{-k}$!
   - Les candidats ne choisissent malheureusement *que des ouvrages en français, toujours les mêmes ;* il faudrait insister sur le fait qu'il existe aussi beaucoup d'excellents ouvrages en anglais, on peut penser notamment aux deux livres récents de Stein et Shakarchi (Complex Analysis et Fourier Analysis, an introduction) qui se lisent comme des romans !
6. **Divers**
   - Les connaissances sur les produits infinis sont trop imprécises, et cela joue des tours aux candidats lors de leurs nombreux développements sur la fonction Γ : rappelons en particulier que, si la série de complexes u_n est absolument convergente, la suite $P_n = (1 + u_1)...(1 + u_n)$ converge vers une limite finie P, et que P est nulle si et seulement si l'un des facteurs $1 + u_n$ est nul.
   - Les méthodes d'accélération de la convergence en analyse numérique, en particulier celles d'Aitken et de Runge-Kutta, doivent être motivées, sous peine de rester particulièrement mystérieuses et indigestes.
   - Les formules de Taylor, en particulier les hypothèses précises de différentiabilité, sont parfois encore mal connues.
   - Le théorème de Stampacchia demande à être commenté : il se réduit au théorème de projection quand la forme bilinéaire est symétrique, il a des applications aux équations différentielles, ou aux équations aux dérivées partielles elliptiques, et il vaut mieux en donner une ; enfin, déduire le théorème de Lax-Milgram de celui de Stampacchia revient à utiliser un marteau-pilon pour prouver un résultat élégant et utile, mais élémentaire (un opérateur d'image à la fois fermée et dense est surjectif).
   - Dans un espace métrique, la notion d'ensemble borné n'a aucun intérêt, et dans l'énoncé du théorème de Montel sur les familles compactes de fonctions holomorphes (les familles fermées, bornées), le mot borné ne réfère évidemment pas à la métrique, de toute façon bornée par 1 sur tout l'espace !
   - Dans l'énoncé « les fonctions continues à support compact sur $\mathbb{R}^n$ sont denses dans les fonctions continues sur $\mathbb{R}^n$ », la topologie sous-jacente est évidemment celle de la

convergence uniforme sur tout compact ; pas celle de la convergence uniforme sur $\mathbb{R}^n$ tout entier !

7 Épreuve de modélisation

Le jury se félicite de ce que la plupart des candidats sont bien préparés à cette épreuve. Les textes ont été volontiers choisis. Ils ont souvent mis en valeur les candidats bien préparés qui ont à cette occasion pu démontrer leur capacité d'adaptation à un sujet nouveau aussi bien que leurs connaissances. L'utilisation de l'ordinateur et des logiciels mis à la disposition des candidats est presque générale – à des degrés divers – et est appréciée positivement par le jury. Les candidats ne doivent pas perdre de vue qu'il s'agit, à travers l'utilisation de ces logiciels, d'illustrer (par des exemples ou l'étude de cas particulliers) une démarche de modélisation en mathématiques.

Toutefois, le jury dans son ensemble constate que l'**algèbre linéaire** est insuffisamment assimilée par l'ensemble des candidats. Cette lacune se manifeste dans de nombreux domaines, tant la maîtrise des bases de l'algèbre linéaire est essentielle en mathématiques.

Option calcul scientifique

- Le jury rappelle que l'épreuve de modélisation n'est pas une épreuve de programmation. Une utilisation raisonnée des fonctions des logiciels disponibles est plus appréciée qu'une reprogrammation hasardeuse d'algorithmes standards. Bien intégré dans l'exposé, un tel travail peut toutefois devenir pertinent pour illustrer les insuffisances de telle ou telle méthode naïve sur un exemple.
- Il est légitime de se placer dans un cadre plus simple, aussi bien dans une leçon que dans l'étude d'un texte, si des renseignements non triviaux sont ainsi obtenus.
- Il est essentiel que l'exposé sépare clairement les théorèmes (en précisant leur caractère ineffectif le cas échéant), les hypothèses du modèle, les hypothèses simplificatrices (celles du texte, et celles introduites par le candidat, en les justifiant si possible), les conjectures. Et toujours utile de dégager les résultats obtenus.
- Le candidat aura intérêt à détailler les limites des méthodes présentées, l'adéquation des modèles choisis, et le caractère réaliste ou non des exemples proposés, des ordres de grandeur, *etc.* Ainsi, il n'est pas raisonnable qu'un exposé sur le protocole cryptographique RSA utilise sans commentaire 7×13 comme produit de deux grands nombres premiers. Ni que la méthode de factorisation de Berlekamp se conclue froidement par le calcul de p PGCDs quand le candidat vient de s'étendre sur les mérites de l'exponentiation binaire pour le calcul du Frobenius « quand p est grand ».
- Si le « paradoxe des anniversaires » est un théorème, son application à la méthode de factorisation de Pollard est heuristique : les éléments d'une suite récurrente convenable « se comportent comme » un tirage uniformément au hasard.
- De même, l'existence d'un nombre premier de taille donnée pour des besoins cryptographiques peut se justifier asymptotiquement par l'équivalent du théorème des nombres premiers, mais attention à l'effectivité.

  À cet égard, s'il n'est pas exigible de connaître tous les algorithmes employés dans les fonctions du système qu'on utilise, il faut connaître leurs spécifications : nonobstant leur nom, il est rare que les fonctions de type « *isprime* », « *nextprime* », etc., montrent rigoureusement la

primalité. Utiliser des entiers pseudo-premiers en lieu et place de nombres premiers certifiés est raisonnable, mais a des conséquences qu'il est utile de discuter.
- La recherche naïve des racines rationnelles d'un polynôme à coefficients entiers requiert la factorisation potentiellement coûteuse de ses coefficients constants et dominants. Une question sur l'utilisation d'approximations des racines complexes, voire modulo une puissance convenable d'un nombre premier, ne devrait pas surprendre le candidat. Une majoration du module de la plus grande racine (ou d'un rayon spectral) est fréquemment utile, et rarement bien menée.
- Finalement, quelques indications sur la complexité des algorithmes utilisés sont préférables aux assertions souvent douteuses du type « A est beaucoup plus rapide que B ». En se limitant aux algorithmes classiques, inverser une matrice carrée de dimension n, calculer son déterminant ou l'élever au carré requiert $O(n^3)$ opérations sur le corps de base. La multiplication de deux entiers inférieurs à 10^n, leur division euclidienne ou leur pgcd s'effectuent en temps $O(n^2)$.

Probabilités et statistique

Le jury constate que beaucoup de candidats sont bien préparés à cette épreuve.

Les textes ont été l'occasion pour les candidats sérieux de démontrer à la fois leur compréhension d'un sujet nouveau mais aussi leurs connaissances en statistique et probabilités.

Toutefois, il est indispensable que tous les candidats qui choisissent l'option probabilités et statistique puissent expliquer les notions de base du programme de l'oral de l'agrégation de mathématiques. Les points suivants en constituent des exemples :
- Définition des variables aléatoires.
- Connaissance des lois des variables de Bernoulli.
- Définition de la notion d'indépendance de variables aléatoires.
- Énoncés corrects des théorèmes de la loi des grands nombres et du théorème de la limite centrale.
- Ce qui suppose de bien comprendre les notions de convergence en loi, en probabilité et presque sûre.
- Les chaînes de Markov sont assez bien comprises par les candidats mais il importe de savoir expliciter, à partir d'exemples simples et concrets, les propriétés de la chaîne de Markov.
- Estimation d'un paramètre pour les modèles statistiques les plus courants.

Les notions de simulation et de modélisation sont parfois confondues par les candidats.

Parmi les notions insuffisamment maîtrisées figurent celles du programme de statistique. Seuls les très bons candidats savent expliquer clairement ce qu'est un test en statistique et peu arrivent à tester une hypothèse à partir d'un exemple précis. Les problèmes concrets liés à l'estimation de paramètres inconnus sont rarement abordés bien qu'ils soient souvent à la base de la modélisation à partir de données.

Le jury, constatant la croissance du nombre de candidats qui ignorent tout ou partie de la statistique, a été vigilant quant au contrôle de cette connaissance.

8 Ouvrages autorisés

Les candidats peuvent utiliser librement les ouvrages de la bibliothèque de l'agrégation dont la composition, pour la session 2004, est rappelée en annexe 2. Ils peuvent aussi emprunter les ouvrages mis à la disposition de tous les candidats par les centres de préparation à l'agrégation. Ces ouvrages sont rangés dans une des deux salles de la bibliothèque. Le nombre d'exemplaires de chaque titre étant limité, un ouvrage emprunté par un ou plusieurs candidats peut être indisponible.

Un candidat peut aussi utiliser tout ouvrage qu'il a apporté à la condition :

• qu'il soit en vente dans le commerce, ce qui se manifeste par la présence d'un numéro d'identification ISBN ;

• qu'il soit rédigé en langue française ou en langue anglaise ;

• qu'il soit vierge de toute annotation ;

• qu'il ne comporte pas des plans ou des développements tous faits, spécifiquement rédigés pour la préparation de l'agrégation : à cet égard une liste d'ouvrages interdits est affichée sur la porte de la bibliothèque.

Le président du jury, ou l'un des membres du jury, a toute autorité pour refuser l'utilisation d'un ouvrage ne remplissant pas l'ensemble de ces conditions.

À titre indicatif, pour le concours 2004, la liste des ouvrages non autorisés était la suivante :

AVEZ A. Analyse pour l'agrégation [Masson]

AVEZ A. La leçon d'analyse à l'Oral de l'agrégation [Masson]

AVEZ A. La leçon de géométrie à l'Oral de l'agrégation [Masson]

CHAMBERT-LOIR A. Exercices de mathématiques pour l'agrégation, tome I, 1 re édition [Masson]

CORTIER J.P. Exercices corrigés d'algèbre et géométrie [CRDP de Champagne Ardenne]

DUMAS L. Modélisation à l'oral de l'agégation. Calcul Scientifique [Ellipses]

GUÉNARD F. Vademecum de l'oral d'analyse, agrégation de mathématiques [Eska]

MADÈRE K. Préparation à l'oral de l'agrégation. Leçon d'algèbre [Ellipses]

MADÈRE K. Préparation à l'oral de l'agrégation. Leçon d'analyse [Ellipses]

MADÈRE K. Développement pour leçon d'analyse, agrégation de mathématiques [Ellipses]

MADÈRE K. Développement pour leçon d'algèbre, agrégation de mathématiques [Ellipses]

MEUNIER P. Exercices pour l'agrégation interne de mathématiques [PUF]

MEUNIER P. Préparation à l'agrégation interne, IREM de Montpellier [PUF]

TOULOUSE P.S. Thèmes de probabilités et statistiques, agrégation de mathématiques [Dunod]

L'évolution du concours pour la session 2006

La session 2005 se déroulera selon les mêmes modalités et avec le même programme que la session 2004. La nouvelle organisation du concours sera effective pour la session 2006, conformément à l'arrêté du 23 juin 2004 paru au journal officiel n° 153 du 3 juillet 2004.

En voici les modalités officielles :

L'écrit

Pour les épreuves écrites d'admissibilité, il n'y a aucun changement. L'écrit comporte, comme pour les sessions antérieures, deux épreuves :

- une composition de mathématiques générales (durée : six heures ; coefficient 1) ;
- une composition d'analyse et de probabilités (durée : six heures ; coefficient 1).

L'oral

Pour les épreuves orales d'admission, les candidats ont le choix entre quatre options :

- option A : probabilités et statistiques ;
- option B : calcul scientifique ;
- option C : algébre et calcul formel ;
- option D : informatique.

Le choix de l'option s'effectue lors de l'inscription. Les candidats proposés par le jury pour l'admission ne font pas l'objet de classements distincts selon l'option choisie : il n'y a donc pas de quotas. Les deux premières épreuves orales sont communes aux candidats des options A, B et C, elles sont spécifiques pour les candidats de l'option D.

Option A : probabilités et statistiques
Option B : calcul scientifique
Option C : algébre et calcul formel

1) Épreuve d'algébre et géométrie (durée de la préparation : trois heures ; durée de l'épreuve : une heure maximum ; coefficient 1).

L'épreuve est commune aux options A, B et C.

2) Épreuve d'analyse et probabilités (durée de la préparation : trois heures ; durée de l'épreuve : une heure maximum ; coefficient 1).

L'épreuve est commune aux options A, B et C.

Pour chacune de ces épreuves :

- deux sujets au choix sont proposés par le jury au candidat ;

- pour la préparation, le candidat dispose de documents fournis par le jury et peut utiliser ses propres ouvrages s'ils sont autorisés ;

- à l'issue de la préparation, le candidat présente au jury un plan d'étude détaillé du sujet qu'il a choisi. Ce plan est présenté quinze minutes au maximum. Il est suivi du développement d'une question qui lui est liée. L'épreuve se termine par un entretien avec le jury au cours duquel celui-ci peut éventuellement proposer un ou plusieurs exercices.

3) Épreuve de modélisation (durée de la préparation : quatre heures ; durée de l'épreuve : une heure et quinze minutes maximum ; coefficient 1).

L'épreuve porte sur un programme commun aux options A, B et C et sur un programme spécifique à l'option choisie.

Deux textes de modélisation mathématique sont proposés au candidat suivant l'option choisie.

Pour la préparation, le candidat dispose de documents fournis par le jury et peut utiliser ses propres ouvrages s'ils sont autorisés. Il dispose également d'un ordinateur muni des logiciels indiqués au programme de l'option.

Le candidat présente un exposé construit à partir du texte choisi. Il peut en faire la synthèse, détailler la signification et le schéma de preuve de résultats choisis dans le texte, en montrer l'exploitation dans une séquence pédagogique. Cette séquence pédagogique peut faire l'usage d'une illustration à l'aide des logiciels indiqués au programme.

Le jury intervient à son gré au cours de l'épreuve et conduit le dialogue avec le candidat.

Option D : informatique

1) Épreuve de mathématiques (durée de la préparation : trois heures ; durée de l'épreuve : une heure maximum ; coefficient 1).

2) Épreuve d'informatique fondamentale (durée de la préparation : trois heures ; durée de l'épreuve : une heure maximum ; coefficient 1).

Pour chacune de ces deux épreuves :

- deux sujets au choix sont proposés par le jury au candidat ;
- pour la préparation, le candidat dispose de documents fournis par le jury et peut utiliser ses propres ouvrages s'ils sont autorisés ;
- à l'issue de la préparation, le candidat présente au jury un plan détaillé du sujet qu'il a choisi. Ce plan est présenté pendant quinze minutes au maximum. Il est suivi du développement d'une question qui lui est liée. L'épreuve se termine par un entretien avec le jury au cours duquel celui-ci peut éventuellement proposer un ou plusieurs exercices.

3) Épreuve d'analyse de système informatique (durée de la préparation : quatre heures ; durée de l'épreuve : une heure et quinze minutes maximum ; coefficient 1).

Deux textes décrivant une classe de systèmes informatiques sont proposés au candidat.

Pour la préparation, le candidat dispose de documents fournis par le jury et peut utiliser ses propres ouvrages s'ils sont autorisés. Il dispose également d'un ordinateur muni des logiciels indiqués au programme.

Le candidat présente un exposé construit à partir du texte choisi. Il peut en faire la synthèse, expliciter les relations entre les systèmes et les modèles informatiques présentés, justifier leur pertinence et leur efficacité. Cette présentation peut faire l'usage de l'ordinateur.

Le jury intervient à son gré au cours de l'épreuve et conduit le dialogue avec le candidat.

Remarques

• L'innovation la plus importante est l'introduction d'une option informatique pour laquelle les trois épreuves orales sont spécifiques et nouvelles, même si leurs modalités techniques sont semblables à celles des autres options.

• Pour les options A, B et C, qui remplacent les deux options actuelles (statistiques et probabilités, calcul scientifique), l'épreuve orale de modélisation s'appuie obligatoirement sur un texte fourni par le jury et le candidat a le choix entre deux textes relatifs à son option.

• Les nouveaux programmes seront publiés dans le courant de l'année scolaire 2004-2005. Des projets, non encore officiels mais très proches des programmes définitifs figurent, à titre d'information, sur le site de l'agrégation externe de mathématiques, à l'adresse URL :

`http://www.agreg.org`

Par ailleurs, le jury publiera, à cette adresse, au plus tard au mois de septembre 2005 la liste des leçons d'oral qui seront posées à la session 2006 dans les deux premières épreuves orales de l'option D, respectivement mathématiques et informatique fondamentale.

ANNEXE 1 : Leçons d'oral 2004

Algébre et géométrie

101 - Groupe opérant sur un ensemble. Exemples et applications.

102 - Sous-groupes discrets de $\mathbb{R}^n$. Réseaux.

103 - Exemples de sous-groupes distingués et de groupes quotients. Applications.

104 - Groupes finis. Exemples et applications.

105 - Groupe des permutations d'un ensemble fini. Applications.

106 - Groupe linéaire d'un espace vectoriel de dimension finie E, sous-groupes de $\mathrm{GL}(E)$. Applications.

107 - Sous-groupes finis de $\mathrm{O}(2,\mathbb{R})$, de $\mathrm{O}(3,\mathbb{R})$. Applications.

108 - Exemples de parties génératrices d'un groupe.

109 - Anneaux $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$. Applications.

110 - Nombres premiers. Applications.

111 - Exemples d'applications des idéaux d'un anneau commutatif unitaire.

146 - Anneaux principaux.

112 - Corps finis. Applications.

113 - Groupe des nombres complexes de module 1. Applications.

114 - Équations diophantiennes du premier degré $ax+by=c$. Autres exemples d'équations diophantiennes.

115 - Corps des fractions rationnelles à une indéterminée sur un corps commutatif. Applications.

116 - Polynômes irréductibles à une indéterminée. Corps de rupture. Exemples et applications.

117 - Algèbre des polynômes à n indéterminées ($n \geqslant 2$). Polynômes symétriques. Applications.

118 - Racines des polynômes à une indéterminée. Relations entre les coefficients et les racines d'un polynôme. Exemples et applications.

119 - Polynômes orthogonaux. Exemples et applications.

120 - Dimension d'un espace vectoriel (on se limitera au cas de la dimension finie). Rang. Exemples et applications.

121 - Matrices équivalentes. Matrices semblables. Applications.

122 - Opérations élémentaires sur les lignes et les colonnes d'une matrice. Résolution d'un système d'équations linéaires. Exemples et applications.

123 - Déterminant. Exemples et applications.

124 - Réduction d'un endomorphisme en dimension finie. Applications.

125 - Sous-espaces stables d'un endomorphisme d'un espace vectoriel de dimension finie. Applications.

126 - Endomorphismes diagonalisables.

127 - Exponentielle de matrices. Applications.

128 - Endomorphismes nilpotents.

129 - Polynômes d'endomorphismes. Applications.

130 - Exemples de décompositions remarquables dans le groupe linéaire. Applications.

131 - Formes quadratiques sur un espace vectoriel de dimension finie. Applications.

132 - Formes linéaires et hyperplans en dimension finie. Exemples et applications.

133 - Endomorphismes remarquables d'un espace vectoriel euclidien de dimension finie.

134 - Endomorphismes remarquables d'un espace vectoriel hermitien de dimension finie.

135 - Isométries d'un espace affine euclidien de dimension finie. Formes réduites. Applications.

136 - Coniques.

137 - Barycentres dans un espace affine réel de dimension finie ; convexité. Applications.

138 - Homographies de la droite complexe. Applications.

139 - Applications des nombres complexes à la géométrie.

140 - Utilisation des angles en géométrie.

141 - Utilisation des groupes en géométrie.

142 - Exemples de propriétés projectives et d'utilisation d'éléments à l'infini.

143 - Constructions à la règle et au compas.

147 - Applications affines.

144 - Problèmes d'angles et de distances en dimension 2 ou 3.

145 - Méthodes combinatoires, problèmes de dénombrement.

Analyse et probabilités

201 - Espaces de fonctions. Exemples et applications.

202 - Exemples de parties denses et applications.

203 - Utilisation de la notion de compacité.

204 - Connexité. Exemples et applications.

205 - Espaces complets. Exemples et applications.

206 - Utilisation de théorèmes de point fixe.

207 - Prolongement de fonctions. Applications.

208 - Utilisation de la continuité uniforme en analyse.

209 - Utilisation de la dénombrabilité en analyse et en probabilités.

210 - Applications linéaires continues entre espaces vectoriels normés. Exemples et applications.

211 - Utilisation de la dimension finie en analyse.

212 - Méthodes hilbertiennes en dimension finie et infinie.

213 - Bases hilbertiennes. Exemples et applications.

214 - Applications du théorème d'inversion locale et du théorème des fonctions implicites.

215 - Applications différentiables définies sur un ouvert de $\mathbb{R}^n$. Exemples et applications.

216 - Étude de courbes. Exemples.

217 - Étude locale de surfaces. Exemples.

218 - Applications des formules de Taylor.

219 - Problèmes d'extremums.

220 - Équations différentielles $X' = f(t, X)$; exemples d'études qualitatives des solutions.

221 - Équations différentielles linéaires. Systèmes d'équations différentielles linéaires. Exemples et applications.

222 - Exemples d'équations différentielles. Solutions exactes ou approchées.

223 - Convergence des suites numériques. Exemples et applications.

224 - Comportement asymptotique des suites numériques. Rapidité de convergence. Exemples.

226 - Comportement d'une suite réelle ou vectorielle définie par une itération $u_{n+1} = f(u_n)$. Exemples.

227 - Développement asymptotique d'une fonction d'une variable réelle.

228 - Continuité et dérivabilité des fonctions réelles d'une variable réelle. Exemples et contre-exemples.

229 - Fonctions monotones. Fonctions convexes. Exemples et applications.

230 - Séries de nombres réels ou complexes. Comportement des restes ou des sommes partielles des séries numériques. Exemples.

231 - Illustrer par des exemples et des contre-exemples la théorie des séries numériques.

232 - Méthodes d'approximation des solutions d'une équation $F(X) = 0$. Exemples.

233 - Intégration des fonctions d'une variable réelle. Suites de fonctions intégrables.

234 - Espaces L^p, $1 \leqslant p \leqslant +\infty$.

235 - Interversion d'une limite et d'une intégrale. Exemples et applications.

236 - Illustrer par des exemples quelques méthodes de calcul d'intégrales de fonctions d'une ou plusieurs variables réelles.

237 - Problèmes de convergence et de divergence d'une intégrale sur un intervalle de $\mathbb{R}$.

238 - Méthodes de calcul approché d'intégrales.

239 - Fonctions définies par une intégrale dépendant d'un paramètre. Exemples et applications.

240 - Transformation de Fourier, produit de convolution. Applications.

241 - Suites et séries de fonctions. Exemples et contre-exemples.

242 - Exemples d'utilisation de fonctions définies par des séries.

243 - Convergence des séries entières, propriétés de la somme. Exemples et applications.

244 - Fonctions d'une variable complexe, holomorphie. Exemples et applications.

245 - Fonctions holomorphes et méromorphes sur un ouvert de $\mathbb{C}$.

246 - Développement d'une fonction périodique en série de Fourier. Exemples et applications.

247 - Exemples de problèmes d'interversion de limites.

248 - Approximation des fonctions numériques par des fonctions polynomiales ou polynomiales par morceaux. Exemples.

249 - Le jeu de pile ou face (suites de variables de Bernoulli indépendantes).

250 - Loi binomiale, loi de Poisson. Applications.

251 - Indépendance d'événements et de variables aléatoires. Exemples.

252 - Parties convexes, fonctions convexes (d'une ou plusieurs variables). Applications.

Modélisation : calcul scientifique

301 - Appliquer et comparer des méthodes numériques ou symboliques de réduction de matrices dans des problèmes issus de modélisations.

302 - Utiliser et comparer des méthodes numériques ou symboliques de résolution de systèmes linéaires dans des problèmes issus de modélisations.

303 - Dégager et étudier par des méthodes numériques ou symboliques des systèmes d'équations non linéaires - par exemple polynomiales - dans des problèmes issus de modélisations.

304 - Utiliser dans des problèmes issus de modélisations des résultats relatifs à l'approximation ou à l'interpolation de fonctions.

305 - Utiliser et comparer des méthodes numériques ou symboliques de résolution d'équations différentielles dans des problèmes issus de modélisations.

306 - Applications de la transformée ou des séries de Fourier - par exemple aux équations aux dérivées partielles.

307 - Propriétés qualitatives d'une équation différentielle ou d'un système différentiel, applications.

308 - Utiliser et comparer des méthodes de factorisation et de recherche des racines d'un polynôme, applications.

309 - Appliquer et comparer des méthodes de minimisation dans des problèmes issus de modélisations.

310 - Problèmes liés à la représentation des courbes ou des surfaces, applications.

311 - Étudier la dépendance des solutions d'une équation par rapport à un paramètre dans des problèmes issus de modélisations.

312 - PGCD, PPCM : méthodes de calcul et applications.

313 - Application des congruences ou des corps finis.

314 - Utilisation de la convexité dans des problèmes issus de modélisations.

315 - Utiliser et comparer des méthodes numériques ou symboliques de résolution d'équations aux dérivées partielles dans des problèmes issus de modélisations.

Modélisation : probabilités et statistiques

401 - Exemples d'applications de lois des grands nombres et du théorème de la limite centrale en situation de modélisation.

402 - À partir d'exemples issus de la modélisation motiver, décrire et critiquer une méthode probabiliste pour le calcul approché d'une intégrale.

403 - Utilisation de l'espérance conditionnelle dans différents modèles.

404 - Exemples d'utilisation des martingales en modélisation.

405 - Utilisation en modélisation de vecteurs aléatoires gaussiens.

406 - Exemples d'utilisation du modèle linéaire gaussien en modélisation.

407 - Exemples et principes de tests statistiques en modélisation.

408 - Utilisation d'ensembles de confiance en modélisation.

409 - Utilisation en modélisation de la notion de fonction de répartition empirique.

410 - Utilisation de lois exponentielles en modélisation.

411 - Applications de méthodes de simulation de variables ou de vecteurs aléatoires à des problèmes de modélisation.

412 - Exemples liés à la modélisation de chaînes de Markov récurrentes ou transientes à espace d'états au plus dénombrable.

413 - À partir d'exemples liés à la modélisation décrire la convergence d'une chaîne de Markov vers une loi invariante.

414 - Utilisation de la loi de Poisson en modélisation.

415 - Utilisation(s) de la transformée de Laplace ou de la fonction génératrice dans des problèmes de modélisation.

416 - Traitement de données : analyse de la variance et/ou analyse en composantes principales.

ANNEXE 2 : La bibliothèque de l'agrégation

AHUÉS M. **CHATELIN F.**	Exercices de valeurs propres de matrices	MASSON
ALESSANDRI M.	Thèmes de géométrie	DUNOD
ANDLER M. **BLOCH J. D.** **MAILLARD B.**	Exercices corrigés de Mathématiques • Tome 1A - Topologie • Tome 1B - Fonctions numériques • Tome 2 - Suites et séries numériques • Tome 3 - Analyse fonctionnelle • Tome 5 - Algèbre générale, polynômes • Tome 6 - Algèbre linéaire, première partie • Tome 7 - Algèbre linéaire, deuxième partie	ELLIPSES
ANDREWS G.	Number Theory	DOVER
ARIBAUD F. **VAUTHIER J.**	Mathématiques. Première année de DEUG	ESKA
ARNAUDIES J-M. **BERTIN J.**	Groupes, Algèbres et Géométrie • Tome I • Tome II	ELLIPSES
ARNAUDIES J-M. **DELEZOIDE P.** **FRAYSSE H.**	Exercices résolus d'analyse	DUNOD
ARNAUDIES J-M. **DELEZOIDE P.** **FRAYSSE H.**	Exercices résolus d'algèbre bilinéaire et géométrie du cours de Mathématiques tome 4	DUNOD
ARNAUDIES J-M. **FRAYSSE H.**	Cours de Mathématiques • 1. Algèbre • 2. Analyse • 3. Compléments d'analyse • 4. Algèbre bilinéaire et géométrie	DUNOD
ARNOLD V.	Chapitre supplémentaire de la théorie des équations différentielles ordinaires	MIR

ARNOLD V.	Équations différentielles ordinaires	MIR
ARTIN E.	Algèbre géométrique	Gauthier-Villars
ARTIN E.	Algèbre géométrique	Gabay
ARTIN M.	Algebra	Prentice Hall
AUBIN J.P.	Analyse fonctionnelle appliquée • Tome 1 • Tome 2	PUF
AUDIN M.	Géométrie de la licence à l'agrégation	Belin
AVANISSIAN V.	Initiation à l'analyse fonctionnelle	PUF
AVEZ A.	Calcul différentiel	Masson
BAKHVALOV N.	Méthodes numériques	MIR
BARANGER J.	Analyse numérique	Hermann
BARRET M. **BENIDIR M.**	Stabilité des filtres et des systèmes linéaires	Dunod
BASILI B. **PESKINE C.**	Algèbre	Diderot, éditeur Arts et Sciences
BASS J.	Cours de Mathématiques • Tome 1 • Tome 2	Masson
BENDER C. **ORSZAG S.**	Advanced mathematical methods for scientists and engineers	Mc Graw Hill
BERGER M. **GOSTIAUX B.**	Géométrie différentielle	Armand Colin

BERGER M. **BERRY J-P.** **PANSU P.** **SAINT RAYMOND X.**	Problèmes de géométrie commentés et rédigés	CÉDIC/NATHAN
BERGER M.	Géométrie • Index • 1. Action de groupes, espaces affines et projectifs • 2. Espaces euclidiens, triangles, cercles et sphères • 3. Convexes et polytopes, polyèdres réguliers, aires et volumes • 4. Formes quadratiques, quadriques et coniques • 5. La sphère pour elle-même, géométrie hyperbolique, l'espace des sphères	CÉDIC/NATHAN
BERGER M.	Géométrie tome 2	NATHAN
BICKEL P.J. **DOKSUM K.A.**	Mathematical statistics	PRENTICE HALL
BIGGS NORMAN L.	Discrete mathematics	OXFORD SCIENCE PUBLICATIONS
BLANCHARD A.	Les corps non commutatifs	PUF
BOAS R.	A primer of real functions	MATHEMATICAL ASSOCIATION OF AMERICA
BON J.L.	Fiabilité des systèmes	MASSON
BONNANS J.F. **GILBERT J.C.** **LEMARECHAL C.** **SAGASTIZABAL C.**	Optimisation numérique	SPRINGER

BOURBAKI N.	Éléments de Mathématique • Topologie générale, chapitres V à X • Fonctions d'une variable réelle, chapitres I à VII • Fonctions d'une variable réelle, chapitres I à III • Fascicule XIII Intégration, chapitres I à IV	HERMANN
BOUVIER A. **RICHARD D.**	Groupes	HERMANN
BREMAUD P.	Introduction aux probabilités	SPRINGER
BREZIS H.	Analyse fonctionnelle, théorie et applications	MASSON
BROUSSE P.	Mécanique MP - PC.- Spéciales A. A'. B. B'.	ARMAND COLIN
BRUCE J.W. **GIBLIN P.J.** **RIPPON P.J.**	Microcomputers and Mathematics	CAMBRIDGE
CABANE R. **LEBOEUF C.**	Algèbre linéaire • 1. Espaces vectoriels , Polynômes • 2. Matrices et réduction	ELLIPSES
CABANNES H.	Cours de Mécanique générale	DUNOD
CALAIS J.	Éléments de théorie des anneaux	PUF
CALAIS J.	Éléments de théorie des groupes	PUF
CARREGA J.C.	Théorie des corps	HERMANN
CARTAN H.	Calcul différentiel (1971)	HERMANN
CARTAN H.	Cours de calcul différentiel (1977)	HERMANN

CARTAN H.	Formes différentielles	HERMANN
CARTAN H.	Théorie élémentaire des fonctions analytiques	HERMANN
CARTIER P. **KAHANE J.P.** **ARNOLD V. et al.**	Leçons de mathématiques d'aujourd'hui	CASSINI
CASTLEMAN K.R.	Digital image processing	PRENTICE HALL
CHAMBERT-LOIR A. **FERMIGER S.** **MAILLOT V.**	Exercices de mathématiques pour l'agrégation Analyse 1 (seconde édition revue et corrigée)	MASSON
CHAMBERT-LOIR A. **FERMIGER S.**	Exercices de mathématiques pour l'agrégation • Analyse 2 • Analyse 3	MASSON
CHATELIN F.	Valeurs propres de matrices	MASSON
CHILDS L.	A concrete introduction to Higher Algebra	SPRINGER VERLAG
CHOQUET G.	Cours d'analyse Tome II : Topologie	MASSON
CHOQUET G.	L'enseignement de la géométrie	HERMANN
CHRISTOL G. **PILIBOSSIAN P.** **YAMMINE S.**	• Algèbre 1 • Algèbre 2	ELLIPSES
CIARLET P.G.	Introduction à l'analyse numérique matricielle et à l'optimisation	MASSON
COHN P.M.	Algebra Volume 1	JOHN WILEY

COLLECTIF (Ebbinghaus, Hermes, Hirzebruch, Koecher, Lamotke, Mainzer, Neukirch, Prestel, Remmert)	Les Nombres	VUIBERT
COLLET P.	Modeling binary data	CHAPMAN AND HALL
COMBROUZE A.	Probabilités et statistiques	PUF
COTRELL M. **GENON-CATALOT V.** **DUHAMEL C.** **MEYRE T.**	Exercices de probabilités	CASSINI
COURANT R. **HILBERT D.**	Methods of Mathematical Physics • Volume 1 • Volume 2	JOHN WILEY
COXETER H.S.M.	Introduction to Geometry	JOHN WILEY
CROUZEIX M. **MIGNOT A.**	Analyse numérique des équations différentielles	MASSON
CVITANOVIC P.	Universality in Chaos	INSTITUTE OF PHYSICS PUBLISHING
DACUNHA-CASTELLE D. **DUFLO M.**	• Probabilités et Statistiques 1. Problèmes à temps fixe • Exercices de Probabilités et Statistiques 1. Problèmes à temps fixe	MASSON
DACUNHA-CASTELLE D. **REVUZ D.** **SCHREIBER M.**	Recueil de problèmes de calcul des probabilités	MASSON
de KONNINCK J.M. **MERCIER A.**	Introduction à la théorie des nombres	MODULO
DEHEUVELS P.	L'intégrale	PUF
DEHEUVELS P.	L'intégrale	QUE-SAIS-JE ? PUF

DEHEUVELS R.	Formes quadratiques et groupes classiques	PUF
DEHORNOY P.	Mathématiques de l'informatique	Dunod
DEHORNOY P.	Complexité et décidabilité	Springer
DEMAILLY J.P.	Analyse numérique et équations différentielles	PU Grenoble
DEMAZURE M.	Catastrophes et bifurcations	Ellipses
DEMAZURE M.	Cours d'algèbre : primalité, divisibilité, codes	Cassini
DEMBO A. **ZEITOUNI O.**	Large deviations techniques and applications	Springer
DESCOMBES R.	Éléments de théorie des nombres	PUF
DESCHAMPS **WARUSFEL** **MOULIN, RUAUD** **MIQUEL, SIFRE**	Mathématiques, cours et exercices corrigés • 1ère année MPSI, PCSI, PTSI • 2ème année MP, PC, PSI	Dunod
DEVANZ **ELHODAIBI**	Exercices corrigés de Mathématiques posés à l'oral des Ensi, Tome 2	Ellipses
DIEUDONNÉ J.	Algèbre linéaire et géométrie élémentaire	Hermann
DIEUDONNÉ J.	Calcul infinitésimal	Hermann
DIEUDONNÉ J.	Sur les groupes classiques	Hermann
DIEUDONNÉ J.	Éléments d'Analyse. • Fondements de l'analyse moderne • Éléments d'Analyse Tome 2.	Gauthier-Villars

DIXMIER J.	Cours de Mathématiques du premier cycle • Première année • Deuxième année	GAUTHIER-VILLARS
DRAPPER N. **SCHMITH H.**	Applied regression analysis	WILEY
DUBUC S.	Géométrie plane	PUF
DYM H. **Mac KEAN H.P.**	Fouriers series and integrals	ACADEMICS PRESS
EL KACIMI ALAOUI A. **QUEFFÉLEC H.** **SACRÉ C.** **VASSALLO V.**	Quelques aspects des mathématiques actuelles	ELLIPSES
EPISTEMON L. **(OVAERT J.L.** **VERLEY J.L.)**	Exercices et problèmes • Analyse. Volume 1 • Algèbre.	CÉDIC/NATHAN
EXBRAYAT J.M. **MAZET P.**	Notions modernes de mathématiques • Algèbre 1 : Notions fondamentales de la théorie des ensembles • Analyse 1 : Construction des espaces fondamentaux de l'analyse • Analyse 2 : Éléments de topologie générale	HATIER
FADDEEV D. **SOMINSKI I.**	Recueil d'exercices d'Algèbre Supérieure	MIR
FAIRBANK X. **BEEF C.**	POX - Exercices posés au petit oral de l'X	ELLIPSES
FARAUT J. **KHALILI E.**	Arithmétique Cours, Exercices et Travaux Pratiques sur Micro-Ordinateur	ELLIPSES
FELLER W.	An introduction to probability theory and its applications • Volume 1 • Volume 2	JOHN WILEY
FERRIER J.P.	Mathématiques pour la licence	MASSON

FLORY G.	Exercices de topologie et analyse avec solutions • Tome 1 - Topologie • Tome 2 - Fonctions d'une variable réelle • Tome 3 - Fonctions différentiables, intégrales multiples • Tome 4 - Séries, équations différentielles	VUIBERT
FRANCHINI J. **JACQUENS J-C.**	Mathématiques Spéciales • Algèbre • Analyse 1 • Analyse 2	ELLIPSES
FRANCINOU S. **GIANELLA H.** **NICOLAS S.**	Exercices de mathématiques Oraux X-ens Algèbre 1	CASSINI
FRANCINOU S. **GIANELLA H.**	Exercices de Mathématiques Algèbre 1	MASSON
FRENKEL J.	Géométrie pour l'élève et le professeur	HERMANN
FRESNEL J.	Géométrie algébrique	UFR MATHS BORDEAUX
FRESNEL J.	Géométrie	IREM DE BORDEAUX
FRESNEL J.	Anneaux	HERMANN
FRESNEL J.	Groupes	HERMANN
FRESNEL J.	Méthodes modernes en géométrie	HERMANN
FUHRMANN P.	A polynomial approach to linear algebra	SPRINGER
GABRIEL P.	Matrices, géométrie, algèbre linéaire	CASSINI
GANTMACHER F.R.	Théorie des matrices • Tome 1 • Tome 2	DUNOD

GENET J.	Mesure et intégration. Théorie élémentaire. Cours et exercices résolus	VUIBERT
GHIDAGLIA J.M.	Petits problèmes d'analyse	SPRINGER
GOBLOT R.	Algèbre commutative	MASSON
GODEMENT R.	Analyse • Tome 1 • Tome 2 • Tome 3	SPRINGER
GODEMENT R.	Cours d'Algèbre	HERMANN
GOLUB G.H. **VAN LOAN C.F.**	Matrix computations	WILEY
GONNORD S. **TOSEL N.**	Thèmes d'Analyse pour l'agrégation I Topologie et Analyse fonctionnelle	ELLIPSES
GOSTIAUX B.	Cours de mathématiques spéciales • Tome 1 - Algèbre • Tome 2 - Topologie et analyse réelle • Tome 3 - Analyse fonctionnelle et calcul différentiel • Tome 4 - Géométrie affine et métrique • Tome 5 - Géométrie : arcs et nappes	PUF
GOURDON X.	Les maths en tête, mathématiques pour M' • Algèbre • Analyse	ELLIPSES
GRAMAIN A.	Géométrie élémentaire	HERMANN
GRAMAIN A.	Intégration	HERMANN
GREUB W.	Linear Algebra	SPRINGER VERLAG
GRIMMET G. **WELSH D.**	Probability (an introduction)	OXFORD

GUJARATI D. N.	Basic Econometrics	Wiley
HABSIEGER L. **MARTEL V.**	Exercices corrigés posés à l'oral des ENSI Tome 1 Analyse	Ellipses
HALMOS P.	Problèmes de mathématiciens petits et grands	Cassini
HAMMAD P.	Cours de probabilités	Cujas
HAMMAD P. **TARANCO A.**	Exercices de probabilités	Cujas
HAMMER **HOCKS** **KULISH** **RATZ**	C++ toolbox for verified computing	Springer
HARDY G.H. **WRIGH E.M.**	An introduction to the theory of numbers	Oxford
HENNEQUIN P.L. **TORTRAT A.**	Théorie des probabilités et quelques applications	Masson
HENRICI P.	Applied and Computational Complex Analysis • Volume 1 • Volume 2 • Volume 3	Wiley-Interscience
HERVE M.	Les fonctions analytiques	PUF
HIRSCH F. **LACOMBE G.**	Eléments d'analyse fonctionnelle	Masson
HOUZEL C.	Analyse mathématique : cours et exercices	Belin
IRELAND K. **ROSEN M.**	A Classical Introduction to Modern Numbers Theory	Springer Verlag
ITARD J.	Les nombres premiers	Que sais-je ? PUF

JACOBSON N.	Basic Algebra • Tome I • Tome II	Freeman and Co
KAHANE J.P. **GILLES P.**	Séries de Fourier et ondelettes	Cassini
KATZNELSON Y.	An Introduction to Harmonic Analysis	Dover
KERBRAT Y. **BRAEMER J-M.**	Géométrie des courbes et des surfaces	Hermann
KNUTH D.E.	The art of computer programming • Volume 1 : Fundamental algorithms • Volume 2 : Seminumerical algorithms • Volume 3 : Sorting and Searching	Addison-Wesley
KOLMOGOROV A. **FOMINE S.**	Eléments de la théorie des fonctions et de l'analyse fonctionnelle	Ellipses
KÖRNER T.W.	Fourier analysis	Cambridge
KÖRNER T.W.	Exercises for Fourier analysis	Cambridge
KREE P.	Introduction aux Mathématiques et à leurs applications fondamentales M.P.2	Dunod
KRIVINE J.L.	Théorie axiomatique des ensembles	PUF
KRIVINE J.L.	Théorie des ensembles	Cassini
LAAMRI E. H.	Mesures, intégration et transformée de Fourier des fonctions	Dunod
LAFONTAINE J.	Introduction aux variétés différentielles	PUF
LANG S.	Algèbre linéaire • Tome 1 • Tome 2	InterEditions

LANG S.	Algebra	Addison-Wesley
LANG S.	Linear Algebra	Addison-Wesley
LAVILLE	Géométrie pour le CAPES et l'Agrégation	Ellipses
LAX D.	Linear Algebra	Wiley
LE BRIS G.	Maple Sugar : une initiation progressive à Maple	Cassini
LEBŒUF C. **GUEGAND J.** **ROQUE J.L.** **LANDRY P.**	Exercices corrigés de probabilités	Ellipses
LEBORGNE D.	Calcul différentiel et géométrie	PUF
LEBOSSÉ C. **HÉMERY C.**	Géométrie. Classe de Mathématiques	Jacques Gabay
LEHMANN D. **SACRÉ C.**	Géométrie et topologie des surfaces	PUF
LEHNING H. **JAKUBOWICZ D.**	Mathématiques supérieures et spéciales 2 : Dérivation	Masson
LEHNING H.	Mathématiques supérieures et spéciales • Tome 1 : Topologie • Tome 3 : Intégration et sommation • Tome 4 : Analyse en dimension finie • Tome 5 : Analyse fonctionnelle	Masson
LEICHTNAM E. **SCHAUER X.**	Exercices corrigés de mathématiques posés aux oraux X-ENS • Tome I - Algèbre 1 • Tome 2 - Algèbre et géométrie • Tome 3 - Analyse 1 • Tome 4 - Analyse 2	Ellipses

LELONG-FERRAND J. **ARNAUDIES J.M.**	Cours de Mathématiques • Tome 1 pour M-M' : Algèbre • Tome 1 pour A-A" : Algèbre • Tome 2 : Analyse • Tome 3 : Géométrie et cinématique • Tome 4 : Equations différentielles, intégrales multiples	DUNOD
LELONG-FERRAND J.	Géométrie différentielle	MASSON
LELONG-FERRAND J.	Les fondements de la géométrie	PUF
LESIEUR L. **MEYER Y.** **JOULAIN C.** **LEFEBVRE J.**	Algèbre linéaire, géométrie	ARMAND COLIN
MAC LANE S. **BIRKHOFF G.**	Algèbre • 1 : Structures fondamentales • 2 : Les grands théorèmes	GAUTHIER-VILLARS
MACKI J. **STRAUSS A.**	Introduction to optimal control theory	SPRINGER
MALLIAVIN M. P.	Les groupes finis et leurs représentations complexes	MASSON
MALLIAVIN P.	Géométrie différentielle intrinsèque	HERMANN
Manuels Matlab	• Using Matlab version 5 • Using Matlab version 6 • Statistics Toolbox	
MARCE S. **DEVAL-GUILLY E.**	Problèmes corrigés des ENSI	ELLIPSES
MASCART H. **STOKA M.**	Fonctions d'une variable réelle • Tome 1 : Exercices et corrigés • Tome 2 : Exercices et corrigés • Tome 3 : Exercices et corrigés • Tome 4 : Exercices et corrigés	PUF
MAWHIN J.	Analyse : fondements, technique, évolutions	DE BOECK UNIVERSITÉ

MAZET P.	Algèbre et géométrie pour le CAPES et l'Agrégation	Ellipses
MERKIN D.	Introduction to the theory of stability	Springer
MÉTIVIER M.	Notions fondamentales de la théorie des probabilités	Dunod
MÉTIVIER M.	Probabilités : dix leçons d'introduction . École Polytechnique	Ellipses
MIGNOTTE M.	Mathématiques pour le calcul formel	PUF
MNEIMNÉ R.	Eléments de géométrie : action de groupes	Cassini
MNEIMNÉ R. **TESTARD F.**	Introduction à la théorie des groupes de Lie classiques	Hermann
MOISAN J. **VERNOTTE A.** **TOSEL N.**	Exercices corrigés de mathématiques spéciales Analyse : suites et séries de fonctions	Ellipses
MOISAN J. **VERNOTTE A.**	Exercices corrigés de mathématiques spéciales Analyse : topologie et séries	Ellipses
MONIER J.M.	Cours de mathématiques • Analyse 1 MPSI, PCSI, PTSI • Analyse 2 MPSI, PCSI, PTSI • Analyse 3 MP, PSI, PC, PT • Analyse 4 MP, PSI, PC, PT • Algèbre 1 MPSI, PCSI, PTSI • Algèbre 2 MP, PSI, PC, PT • Exercices d'analyse MPSI • Exercices d'analyse MP • Exercice d'algèbre et géométrie MPSI • Exercice d'algèbre et géométrie MP	Dunod
MUTAFIAN C.	Le défi algébrique • Tome 1 • Tome 2	Vuibert

NAUDIN P. **QUITTE C.**	Algorithmique algébrique avec exercices corrigés	Masson
NEVEU J.	Base mathématique du calcul des probabilités	Masson
NIVEN I.	Irrational numbers	Mathematical Association of America
NORRIS J.R.	Markov chains	Cambridge
OPREA J.	Differential geometry	Prentice hall
OUVRARD J.Y.	• Probabilités 1 • Probabilités 2	Cassini
PAPINI O. **WOLFMANN J.**	Algèbre discrète et codes correcteurs	Springer
PEDOE D.	Geometry- A comprehensive course	Dover
PERKO L.	Differential equation and dynamical systems	Springer
PERRIN D.	Cours d'Algèbre	Ellipses
PERRIN D.	Cours d'Algèbre	ENSJF
PERRIN D.	Géométrie algébrique - Une introduction	Interéditions/ CNRS éditions
PERRIN-RIOU B.	Algèbre, arithmétique et MAPLE	Cassini
PÓLYA G. **SZEGÖ G.**	Problems and Theorems in Analysis • Volume I • Volume II	Springer Verlag

POMMELLET A.	Agrégation de Mathématiques. Cours d'Analyse	Ellipses
RALSTON A. **RABINOWITCH P**	A first curse in numerical analysis	Internatinal Student Edition
RAMIS E. **DESCHAMPS C.** **ODOUX J.**	Cours de Mathématiques spéciales • 1- Algèbre • 2- Algèbre et applications à la géométrie • 3- Topologie et éléments d'analyse • 4- Séries et équations différentielles • 5- Applications de l'analyse à la géométrie	Masson
RAMIS E. **DESCHAMPS C.** **ODOUX J.**	Exercices avec solutions • Algèbre • Analyse 1 • Analyse 2	Masson
RAO C.R.	Linear statistical inference and its application	Wiley
RIDEAU F.	Exercices de calcul différentiel	Hermann
RIESZ F. **NAGY SZ. B.**	Leçons d'analyse fonctionnelle	Gauthier-Villars
RIO E.	Théorie asymptotique des processus aléatoires faiblement dépendants	Springer
ROLLAND R.	Théorie des séries 2- Séries entières	Cédic/Nathan
ROMBALDI J.E.	Thèmes pour l'agrégation de mathématiques	EDP Sciences
ROMBALDI J.E.	Analyse matricielle	EDP Sciences
ROUVIÈRE F.	Petit guide de calcul différentiel à l'usage de la licence et de l'agrégation	Cassini

RUAUD J.F. **WARUSFEL A.**	Exercices de Mathématiques Algèbre 3	Masson
RUDIN W.	Analyse réelle et complexe	Masson
RUDIN W.	Functional analysis	Mc Graw Hill
RUDIN W.	Real and complex analysis	Mc Graw Hill
SAKS S. **ZYGMUND A.**	Fonctions analytiques	Masson
SAMUEL P.	Géométrie projective	PUF
SAMUEL P.	Théorie algébrique des nombres	Hermann
SAUVAGEOT F.	Petits problèmes de géométrie et d'algèbre	Springer
SAUX PICARD P.	Cours de calcul formel - Algorithmes fondamentaux	Ellipses
SCHWARTZ L.	Analyse • I Topologie générale et analyse fonctionnelle • II Calcul différentiel et équations différentielles	Hermann
SCHWARTZ L.	Cours d'Analyse	Hermann
SCHWARTZ L.	Méthodes Mathématiques pour les sciences physiques	Hermann
SEDGEWICK R.	Algorithms	Addison Wesley
SELBERHERR S. **STIPPEL H.** **STRASSER E.**	Simulation of semi-conductor devices and processes	Springer

SERRE J.P.	Cours d'arithmétique	PUF
SERVIEN Cl.	• Analyse 1 • Analyse 3 • Analyse 4	ELLIPSES
SIDLER J.C.	Géométrie Projective	DUNOD
SKANDALIS G.	Topologie et analyse	DUNOD
STANLEY R.P.	Enumerative combinatorics Volume I	WADDWORTH AND BROOKS
STEWART I.	Galois theory	CHAPMAN AND HALL
SZPIRGLAS A.	Exercices d'algèbre	CASSINI
TAUVEL P.	Cours de Géométrie	DUNOD
TAUVEL P.	Mathématiques générales pour l'agrégation	MASSON
TAUVEL P.	Exercices de mathématiques pour l'agrégation Algèbre 2	MASSON
TENENBAUM G.	Exercices corrigés de théorie analytique et probabiliste des nombres T 2	S. M. F.
TENENBAUM G.	Introduction à la théorie analytique et probabiliste des nombres T 1	S. M. F.
TENENBAUM G.	Introduction à la théorie analytique et probabiliste des nombres	INSTITUT ELIE CARTAN
TENENBAUM G. **MENDÈS-FRANCE M.**	Les nombres premiers	QUE SAIS-JE ? PUF
TISSIER A.	Mathématiques générales : exercices avec solutions	BRÉAL

TITCHMARSH E.C.	The theory of functions	OXFORD
TORTRAT A.	Calcul des probabilités et introduction aux processus aléatoires	MASSON
TRUFFAULT B.	Exercices de géométrie élémentaires	IREM DES PAYS DE LOIRE
VALIRON G.	Cours d'analyse mathématique • I Théorie des fonctions • II Équations fonctionnelles - Applications	MASSON
VAUTHIER J. **PRAT J-J.**	Cours d'Analyse Mathématique de l'Agrégation	MASSON
VEIGNEAU S.	Approche impérative et fonctionnelle de l'algorithmique	SPRINGER
WAGSCHAL C.	Fonctions holomorphes Équations différentielles	HERMANN
WARUSFEL A.	Structures algébriques finies	CLASSIQUES HACHETTE
WHITTAKER E.T. **WATSON G.N.**	A course of modern analysis	CAMBRIDGE
WILF H.	Generatingfunctionology	ACADEMIC PRESS
YALE P.B.	Geometry and Symmetry	DOVER
YOUNG D.M. **GREGORY R.T.**	A survey of numerical mathematics	DOVER
ZÉMOR G.	Cours de cryptographie	CASSINI
ZUILY Cl. **QUEFFELEC H.**	Éléments d'analyse pour l'agrégation	MASSON