composition de mathématiques générales

ARTICULATION DU PROBLÈME

La partie I est consacrée à l'étude de fonctions vérifiant des équations différentielles algébriques (cette notion sera spécifiée ultérieurement). Les résultats de cette partie I ne sont pas utilisés dans la suite du problème.

La partie II étudie une fonction holomorphe, dont on montrera dans la partie IV qu'elle ne vérifie pas d'équation différentielle algébrique. La partie III permet d'établir quelques résultats sur les polynômes et les fractions rationnelles, en vue des parties IV et V. La partie V généralise et précise le résultat de la partie IV.

Les parties II et III sont indépendantes entre elles.

On désigne par $\mathbb{C}$ le corps des nombres complexes, et par $\mathbb{C}^*$ l'ensemble des nombres complexes non nuls. On notera $\mathbb{N}$ l'ensemble des entiers naturels, $\mathbb{Z}$ l'ensemble des entiers relatifs, et $\mathbb{R}$ celui des nombres réels.

Tous les corps considérés dans le problème sont commutatifs, et de caractéristique nulle.

Si $\mathbf{K}$ est un tel corps, et n un entier naturel, on note $\mathbf{K}[X_0, X_1, \ldots, X_n]$ la $\mathbf{K}$-algèbre des polynômes à $(n+1)$ indéterminées à coefficients dans $\mathbf{K}$. Si α, égal à $(\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_n)$, est un élément de $\mathbb{N}^{n+1}$, on notera X^α le monôme $X_0^{\alpha_0} X_1^{\alpha_1} \ldots X_n^{\alpha_n}$. Tout élément de $\mathbf{K}[X_0, X_1, \ldots, X_n]$ peut donc s'écrire, de façon unique, sous la forme :

$$\sum_{\alpha \in \mathbb{N}^{n+1}} p_\alpha X^\alpha,$$

où la famille $(p_\alpha)_{\alpha \in \mathbb{N}^{n+1}}$ est une famille d'éléments de $\mathbf{K}$ dont tous les termes sont nuls sauf pour un nombre fini de valeurs de α.

L'exponentielle d'un nombre complexe u sera notée e^u.

PARTIE I **Exemples de fonctions vérifiant des équations différentielles algébriques sur $\mathbb{C}$**

Dans cette partie, on désigne par $\mathbf{C}_\infty$ l'ensemble des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$, indéfiniment dérivables sur $\mathbb{R}$. On munit $\mathbf{C}_\infty$ de sa structure naturelle de $\mathbb{C}$-algèbre ; si (f, g, a) appartient à $\mathbf{C}_\infty \times \mathbf{C}_\infty \times \mathbb{C}$, on aura donc :

$$\text{pour tout } u \text{ dans } \mathbb{R}, \quad (f+g)(u) = f(u) + g(u);$$
$$(af)(u) = a \cdot f(u); \quad (fg)(u) = f(u) \cdot g(u).$$

Soit P un élément de $\mathbb{C}[X_0, X_1, \ldots, X_n]$ que l'on écrit :

$$P = \sum_{\alpha \in \mathbb{N}^{n+1}} p_\alpha X^\alpha.$$

Si $f_0, f_1, \ldots, f_n$ sont des éléments de $\mathbf{C}_\infty$, on notera :

$$P(f_0, f_1, \ldots, f_n) = \sum_{\alpha \in \mathbb{N}^{n+1}} p_\alpha f_0^{\alpha_0} f_1^{\alpha_1} \ldots f_n^{\alpha_n}.$$

On définit ainsi un élément de $\mathbf{C}_\infty$.

Enfin, si f est dans $\mathbf{C}_\infty$, $f^{(k)}$ désigne la dérivée k-ième de f ; en particulier, $f^{(0)}$ est égale à f.

Dans cette partie, on pourra utiliser, sans démonstration, le résultat suivant :

Soit $\mathbf{A}$ un anneau commutatif, unitaire et intègre. Soient U et V des éléments de $\mathbf{A}[X]$, où V n'est pas le polynôme nul, le coefficient dominant de V étant de plus supposé inversible dans $\mathbf{A}$. Il existe alors deux éléments Q et R de $\mathbf{A}[X]$ vérifiant :

$$U = VQ + R \text{ avec, de plus, } R = 0, \text{ ou bien degré (R)} < \text{degré (V)}.$$

Les questions I.1., I.2., I.3. sont indépendantes entre elles. Une même notation, utilisée dans des questions différentes, peut donc viser des objets différents.

I.1. L'application exponentielle réelle.

Soit f l'élément de $\mathbf{C}_\infty$ défini par $f(u) = e^u$.

a. Montrer que, pour tout élément P de $\mathbb{C}[X_0]$, on a :

$$P(f) = 0 \Rightarrow P = 0.$$

b. Donner un élément Q non nul de $\mathbb{C}[X_0, X_1]$ tel que $Q(f, f') = 0$.

c. Montrer que, pour tout élément P de $\mathbb{C}[X_0, X_1]$, on a :

$$P(f, f') = 0 \Leftrightarrow \exists R \in \mathbb{C}[X_0, X_1] \quad P = (X_1 - X_0)R.$$

d. Montrer que, pour tout élément P de $\mathbb{C}[X_0, X_1, X_2]$, on a :

$$P(f, f', f'') = 0 \Leftrightarrow \exists R, S \in \mathbb{C}[X_0, X_1, X_2] \quad P = (X_1 - X_0)R + (X_2 - X_0)S.$$

e. Soit **J** l'ensemble défini par l'égalité :

$$\mathbf{J} = \{P \in \mathbb{C}[X_0, X_1, X_2] \text{ tel que } P(f, f', f'') = 0\}.$$

Montrer que **J** est un idéal de $\mathbb{C}[X_0, X_1, X_2]$, et que cet idéal n'est pas principal.

I.2. L'application $u \mapsto \sin u$.

Soit f l'élément de $\mathbf{C}_\infty$ défini par $f(u) = \sin u$.

a. Montrer que, pour tout élément P de $\mathbb{C}[X_0]$, on a :

$$P(f) = 0 \Rightarrow P = 0.$$

b. Donner un élément Q non nul de $\mathbb{C}[X_0, X_1]$ tel que $Q(f, f') = 0$.

c. Soient U, V des éléments de $\mathbb{C}[X_0]$ tels que :

$$U(f)f' + V(f) = 0.$$

Montrer que U et V sont nuls.

d. Soit **J** l'ensemble défini par l'égalité :

$$\mathbf{J} = \{P \in \mathbb{C}[X_0, X_1] \text{ tel que } P(f, f') = 0\}.$$

Montrer que **J** est un idéal principal de $\mathbb{C}[X_0, X_1]$.

e. Soit **L** l'ensemble défini par l'égalité :

$$\mathbf{L} = \{P \in \mathbb{C}[X_0, X_1, X_2] \text{ tel que } P(f, f', f'') = 0\}.$$

L'ensemble **L** est-il un idéal principal de $\mathbb{C}[X_0, X_1, X_2]$?

I.3. L'application $u \mapsto e^{u^2}$.

Soit f l'élément de $\mathbf{C}_\infty$ défini par $f(u) = e^{u^2}$.

a. Montrer que, pour tout élément P de $\mathbb{C}[X_0, X_1]$, on a :

$$P(f, f') = 0 \Rightarrow P = 0.$$

b. Donner un élément Q non nul de $\mathbb{C}[X_0, X_1, X_2]$ tel que $Q(f, f', f'') = 0$.

c. Soit **J** l'ensemble défini par l'égalité :

$$\mathbf{J} = \{P \in \mathbb{C}[X_0, X_1, X_2] \text{ tel que } P(f, f', f'') = 0\}.$$

Montrer que l'ensemble **J** est un idéal principal de $\mathbb{C}[X_0, X_1, X_2]$.

PARTIE II **Solutions holomorphes d'une équation fonctionnelle**

Dans cette partie et les suivantes, Δ désigne le disque unité ouvert de $\mathbb{C}$, et Π le demi-plan des complexes de partie réelle strictement négative :

$$\Delta = \{z \in \mathbb{C} \text{ tel que } |z| < 1\}, \quad \Pi = \{t \in \mathbb{C} \text{ tel que } \operatorname{Re}(t) < 0\}.$$

II.1. *a.* Soit ρ un nombre réel de $[0, 1[$. Montrer que, pour tout entier naturel n, on a :

$$\prod_{k=0}^{n} (1 + \rho^{2^k}) \leqslant \frac{1}{1-\rho}.$$

b. Pour tout z de Δ et pour tout entier naturel n, on pose :

$$\theta_n(z) = \prod_{k=0}^{n} (1 - z^{2^k}).$$

Montrer l'inégalité :

$$|\theta_n(z) - \theta_{n+1}(z)| \leqslant \frac{|z|^{2^{n+1}}}{1 - |z|}.$$

c. Montrer que la suite de fonctions $(\theta_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement sur Δ. La fonction limite est notée θ.

d. Montrer que θ est holomorphe sur Δ.

II.2. *a.* Montrer que, pour tout z dans Δ, on a :

$$\theta(z) = (1 - z)\,\theta(z^2).$$

b. Montrer que θ ne s'annule pas sur Δ.

c. Soit f une fonction continue sur Δ, à valeurs dans $\mathbb{C}$, telle que, pour tout z dans Δ, on ait :

$$f(z) = (1 - z)\,f(z^2).$$

Montrer qu'il existe un complexe λ tel que : $f = \lambda\theta$.

II.3. Pour tout élément t de Π, on pose :

$$\phi(t) = \frac{e^t\,\theta'(e^t)}{\theta(e^t)}.$$

a. Montrer que ϕ est holomorphe sur Π.

b. Montrer que, pour tout t dans Π, on a :

$$\phi(t) = 2\,\phi(2t) + \frac{e^t}{e^t - 1}.$$

c. Montrer qu'il existe une famille $(S_k)_{k\in\mathbb{N}}$ de fractions rationnelles telle que, quels que soient l'entier naturel k et l'élément t de Π, l'on ait :

$$\phi^{(k)}(t) = 2^{k+1}\,\phi^{(k)}(2t) + S_k(e^t),$$

et que l'on a, quels que soient l'entier naturel k et l'élément z de Δ :

$$S_{k+1}(z) = z\,S_k'(z).$$

PARTIE III **Quelques résultats sur les fractions rationnelles et les polynômes**

III.A. **Fractions rationnelles à une indéterminée.**

Dans toute cette partie III.A., on considère $\mathbb{C}(z)$, corps des fractions rationnelles *en l'indéterminée* z, à coefficients dans $\mathbb{C}$.

III.A.1.

a. Si R appartient à $\mathbb{C}(z)$, on peut écrire $R = \dfrac{P}{Q}$, où P et Q appartiennent à $\mathbb{C}[z]$.

On pose alors : • si $R \neq 0$, $\text{degré}(R) = \text{degré}(P) - \text{degré}(Q)$;
• si $R = 0$, $\text{degré}(R) = -\infty$.

Vérifier que degré (R) ne dépend effectivement que de R.

Montrer que, pour tous R et S dans $\mathbb{C}(z)$, on a :

$$\text{degré}(R+S) \leqslant \max(\text{degré}(R), \text{degré}(S)).$$

b. Soit $\mathbb{C}_0(z)$ l'ensemble des fractions rationnelles de degré inférieur ou égal à 0. Soient aussi V le sous-$\mathbb{C}$-espace vectoriel de $\mathbb{C}(z)$ engendré par $\left\{\frac{1}{z-\gamma}\right\}_{\gamma \in \mathbb{C}}$, et W le sous-$\mathbb{C}$-espace vectoriel de $\mathbb{C}(z)$ engendré par $\left\{\frac{1}{(z-\gamma)^n}\right\}_{\gamma \in \mathbb{C},\, n \geqslant 2}$. Vérifier que $\mathbb{C}_0(z)$ est un sous-$\mathbb{C}$-espace vectoriel de $\mathbb{C}(z)$, et que V et W sont des sous-$\mathbb{C}$-espaces vectoriels de $\mathbb{C}_0(z)$.

c. Justifier l'égalité :

$$\mathbb{C}_0(z) = \mathbb{C} \oplus V \oplus W,$$

où $\mathbb{C}$ est identifié à l'ensemble des polynômes constants.

III.A.2. La dérivée de la fraction rationnelle R étant désignée par R′, montrer que l'application de $\mathbb{C}_0(z)$ dans $\mathbb{C}(z)$, qui à tout R associe sa dérivée R′, a pour image W.

III.A.3. Soit μ l'application de $\mathbb{C}_0(z)$ dans $\mathbb{C}(z)$ définie par :

$$\mu(R)(z) = z\,R(z^2).$$

Montrer que V et W sont stables par μ.

III.A.4. Soit R un élément de $\mathbb{C}(z)$; sa décomposition en éléments simples sur $\mathbb{C}$ s'écrit :

$$R(z) = E(z) + \sum_{\gamma \in \mathbb{C},\, n \geqslant 1} \frac{r(\gamma; n)}{(z-\gamma)^n},$$

où E est dans $\mathbb{C}[z]$, et où la famille $(r(\gamma; n))_{\gamma \in \mathbb{C},\, n \geqslant 1}$ est une famille d'éléments de $\mathbb{C}$, nuls sauf pour un nombre fini de couples (γ, n).
Soient a un élément non nul de $\mathbb{C}$, et n un entier naturel non nul.

Lorsque $R(z) = \dfrac{1}{(z^2 - a^2)^n}$, calculer $r(a; n)$.

III.B. Polynômes à $(n+1)$ indéterminées.

III.B.1. Ordre sur $\mathbb{N}^{n+1}$.

On définit par récurrence sur l'entier naturel n une relation binaire sur $\mathbb{N}^{n+1}$, notée $\mathscr{R}_n$, de la façon suivante :

- si $n = 0$, $\mathscr{R}_0$ coïncide avec l'ordre usuel de $\mathbb{N}$, noté aussi $\leqslant$;
- supposant $\mathscr{R}_n$ définie sur $\mathbb{N}^{n+1}$, on considère deux éléments α et β de $\mathbb{N}^{n+2}$, notés :

$$\alpha = (\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_{n+1}) \quad \text{et} \quad \beta = (\beta_0, \beta_1, \ldots, \beta_{n+1}).$$

On écrira alors $\alpha\,\mathscr{R}_{n+1}\,\beta$ lorsque :

– ou bien $\alpha_{n+1} < \beta_{n+1}$;

– ou bien $\alpha_{n+1} = \beta_{n+1}$, et $(\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_n)\,\mathscr{R}_n\,(\beta_0, \beta_1, \ldots, \beta_n)$.

Dans cette question, une attention toute particulière sera apportée à la précision des raisonnements.

a. Montrer que $\mathscr{R}_n$ est une relation d'ordre sur $\mathbb{N}^{n+1}$.

b. Soit **E** un sous-ensemble non vide de $\mathbb{N}^{n+1}$. Montrer que **E** admet un plus petit élément, noté min **E**.

c. Montrer que la relation d'ordre $\mathscr{R}_n$ est totale sur $\mathbb{N}^{n+1}$.

d. Soit **E** un sous-ensemble fini, non vide, de $\mathbb{N}^{n+1}$. Montrer que **E** admet un plus grand élément, noté max **E**.

III.B.2. **Multidegré d'un polynôme de K** $[X_0, X_1, \dots, X_n]$.

Dans les questions III.B.2. et III.B.3., **K** désigne un corps (commutatif, de caractéristique nulle).

a. Soit P un élément non nul de $\mathbf{K}[X_0, X_1, \dots, X_n]$, avec :

$$P = \sum_{\alpha \in \mathbb{N}^{n+1}} p_\alpha X^\alpha .$$

On appelle multidegré de P, et l'on note $d(P)$, l'élément de $\mathbb{N}^{n+1}$ égal à $\max\{\alpha \in \mathbb{N}^{n+1}$ tel que $p_\alpha \neq 0\}$. Le coefficient $p_{d(P)}$ est alors appelé coefficient dominant de P.

Montrer que, si P et Q sont deux éléments non nuls de $\mathbf{K}[X_0, X_1, \dots, X_n]$, de même multidegré δ, et de coefficients dominants respectifs p_δ et q_δ, on a :

– ou bien $d(p_\delta Q - q_\delta P)\ \mathscr{R}_n\ \delta$ et $d(p_\delta Q - q_\delta P) \neq \delta$;

– ou bien $p_\delta Q - q_\delta P = 0$.

b. Soit **J** un idéal de $\mathbf{K}[X_0, X_1, \dots, X_n]$, différent de $\{0\}$. Montrer qu'il existe un élément M de $\mathbf{J} - \{0\}$ vérifiant la propriété suivante :

si P appartient à $\mathbf{J} - \{0\}$, et si $d(P)\mathscr{R}_n d(M)$, alors il existe c dans **K** tel que $P = cM$.

III.B.3. Soit P un élément de $\mathbf{K}[X_0, X_1, \dots, X_n]$. La notation $\dfrac{\partial P}{\partial X_i}$ désigne, comme d'habitude, la dérivée partielle du polynôme P par rapport à l'indéterminée X_i.

On suppose que P n'appartient pas à **K**, identifié à l'ensemble des polynômes constants.

Montrer qu'il existe un élément $(i_0, i_1, \dots, i_n)$ de $\mathbb{N}^{n+1}$ tel que :

$$\frac{\partial^{i_0 + i_1 + \dots + i_n} P}{\partial X_0^{i_0}\, \partial X_1^{i_1} \dots \partial X_n^{i_n}}$$

soit un polynôme affine non constant, c'est-à-dire soit de la forme :

$$\sum_{i=0}^{n} p_i X_i + q,$$

où $p_0, p_1, \dots, p_n, q$, sont des éléments de **K**, et la famille $(p_0, p_1, \dots, p_n)$ n'est pas la famille nulle.

PARTIE IV **On se propose de montrer que la fonction θ définie dans la question II.1.*c*. ne vérifie pas d'équation différentielle algébrique sur $\mathbb{C}(z)$**

Résultats admis et notations.

Soit Ω un ouvert connexe et non vide de $\mathbb{C}$. On note $H(\Omega)$ l'anneau commutatif et intègre des fonctions holomorphes sur Ω, et $M(\Omega)$ son corps des fractions. On sait que $M(\Omega)$ s'identifie au corps des fonctions méromorphes sur Ω. L'ensemble des fonctions fractions rationnelles est un sous-corps de $M(\Omega)$, identifié à $\mathbb{C}(z)$; de même, l'ensemble des fonctions constantes est un sous-corps de $M(\Omega)$ identifié à $\mathbb{C}$.

La dérivée (complexe) d'une fonction h de $M(\Omega)$ est notée h' ; c'est encore un élément de $M(\Omega)$.

Soit **K** un sous-corps de $M(\Omega)$, contenant $\mathbb{C}$, et h un élément de $M(\Omega)$. On dit que h vérifie une équation différentielle algébrique sur **K** s'il existe un entier naturel n, et un élément P non nul de $\mathbf{K}[X_0, X_1, \dots, X_n]$, tels que :

$$P(h, h', \dots, h^{(n)}) = 0 .$$

Soit $(f_0, f_1, \dots, f_p)$ une famille d'éléments de $M(\Omega)$. Le sous-corps de $M(\Omega)$ engendré par $\mathbf{K} \cup \{f_0, f_1, \dots, f_p\}$ est noté $\mathbf{K}(f_0, f_1, \dots, f_p)$.

IV.1. *a.* On pose : $g = \dfrac{\theta'}{\theta}$. Montrer que, pour tout entier naturel non nul k, il existe un élément Q_k de $\mathbb{C}[Z_0, Z_1, \ldots, Z_{k-1}]$, de multidegré égal à $(0, 0, \ldots, 1)$, tel que :

$$\theta^{(k)} = \theta\, Q_k(g, g', \ldots, g^{(k-1)}).$$

b. Soient n un entier naturel non nul, et H un polynôme homogène non nul, élément de $\mathbb{C}(z)[T_0, T_1, \ldots, T_n]$. Montrer que le polynôme $H(1, Q_1, \ldots, Q_n)$, élément de $\mathbb{C}(z)[Z_0, Z_1, \ldots, Z_{n-1}]$, est non nul.

À partir du IV.2., nous supposons, par l'absurde, que la fonction θ, *introduite dans la partie II, vérifie une équation différentielle algébrique sur* $\mathbb{C}(z)$. *Nous aboutirons à une contradiction dans la question IV.6.*

IV.2. Montrer que g vérifie une équation différentielle algébrique sur $\mathbb{C}(z)$.

Indication. *— On pourra considérer une équation différentielle algébrique vérifiée par* θ *et en déduire l'existence d'une équation algébrique (ordinaire), satisfaite par* θ *sur un certain corps.*

IV.3. *Dans les questions qui suivent, on reprend les notations de la partie II, et on note* L *le sous-corps de* $M(\Pi)$ *égal à* $\mathbb{C}$ (exp), *où* exp *désigne la fonction exponentielle.*

Montrer que l'élément ϕ de $M(\Pi)$, défini en II.3., vérifie une équation différentielle algébrique sur L.

IV.4. Soit h un élément quelconque de $M(\Pi)$; on pose $h^*(t) = h(2t)$. Plus généralement, si P, égal à $\sum_{\alpha \in \mathbb{N}^{n+1}} p_\alpha X^\alpha$, est un élément de $M(\Pi)[X_0, X_1, \ldots, X_n]$, on notera P^* le polynôme $\sum_{\alpha \in \mathbb{N}^{n+1}} p_\alpha^* X^\alpha$.

On utilisera, sans qu'il soit nécessaire de le démontrer, le fait que $h \mapsto h^*$ est un homomorphisme injectif de la $\mathbb{C}$-algèbre $M(\Pi)[X_0, X_1, \ldots, X_n]$ dans elle-même.

Montrer qu'il existe un entier naturel n, un élément M non constant de $L[X_0, X_1, \ldots, X_n]$, et un élément λ de L tels que :

$$M^*\left(\frac{1}{2}(X_0 - R_0), \frac{1}{4}(X_1 - R_1), \ldots, \frac{1}{2^{n+1}}(X_n - R_n)\right) = \lambda M(X_0, X_1, \ldots, X_n),$$

où l'on a posé :

$$R_k(t) = S_k(e^t).$$

Indication. *— On pourra considérer l'idéal des polynômes* Q *à coefficients dans* L *tels que :*

$$Q(\phi, \phi', \ldots, \phi^{(n)}) = 0.$$

IV.5. *a.* Déduire de la question précédente l'existence de U, polynôme affine de $L[X_0, X_1, \ldots, X_n]$ n'appartenant pas à L, et d'un élément μ de L, tels que :

$$U^*\left(\frac{1}{2}(X_0 - R_0), \frac{1}{4}(X_1 - R_1), \ldots, \frac{1}{2^{n+1}}(X_n - R_n)\right) = \mu U(X_0, X_1, \ldots, X_n).$$

b. Montrer qu'il existe un entier naturel [illegible]

IV.6. Conclure que θ ne peut vérifier d'équation différentielle algébrique sur $\mathbb{C}(z)$.

Indication. *— On pourra considérer les pôles de* v.

PARTIE V **Généralisation**

Soit R un élément de $\mathbb{C}(z)$, n'ayant aucun pôle dans Δ, et tel que $R(0) = 1$.

V.1. *a.* Montrer qu'il existe une unique fonction holomorphe sur Δ, notée encore θ par analogie avec les parties précédentes, telle que, pour tout élément z de Δ, l'on ait :

$$\theta(z) = R(z)\,\theta(z^2),$$

et telle que, de plus : $\theta(0) = 1$.

b. Soit f l'élément de M (Π) défini par l'égalité :

$$f(t) = e^t\,\frac{\theta'(e^t)}{\theta(e^t)}.$$

Montrer qu'il existe une famille $(S_k)_{k\in\mathbb{N}}$ de fractions rationnelles telles que, quels que soient l'entier naturel k et l'élément t de Π, l'on ait :

$$f^{(k)}(t) = 2^{k+1} f^{(k)}(2t) + S_k(e^t).$$

V.2. On suppose que θ vérifie une équation différentielle algébrique sur $\mathbb{C}(z)$. De façon identique à ce qui a été fait dans la partie IV, on démontre qu'il existe un entier naturel m et un élément v de $\mathbb{C}(z)$ tels que :

$$S_m(z) = 2^{m+1}\,v(z^2) - v(z).$$

On ne demande pas de prouver ce résultat.

Montrer alors l'existence d'un élément G de $\mathbb{C}(z)$, n'ayant pas 0 pour pôle, tel que :

$$z\,\frac{R'(z)}{R(z)} = 2G(z^2) - G(z).$$

Indication. *— À l'aide de la partie III.A., on pourra montrer que, pour* m *entier naturel non nul,* S_{m-1} *vérifie une relation analogue à celle vérifiée par* S_m.

V.3. *a.* On pose (cf. III.A.) :

$$G(z) = E(z) + \sum_{\gamma\in\mathbb{C}^*,\, n\geq 1} \frac{g(\gamma;n)}{(z-\gamma)^n}.$$

Montrer que, pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 2, et pour tout complexe non nul γ, on a :

$$g(\gamma;n) = 0.$$

b. Montrer alors que θ appartient à $\mathbb{C}(z)$.