J. 5676

SESSION DE 1999

concours externe de recrutement de professeurs agrégés

section : mathématiques

composition d'analyse et probabilités

INTRODUCTION

L'objet du problème est l'étude de certains opérateurs linéaires continus et de leurs itérés sur l'espace de Hilbert séparable, et la recherche de vecteurs dont l'orbite est dense, ou de sous-espaces fermés invariants.

On désignera par $\mathbf{R}$ le corps des nombres réels, et par $\mathbf{C}$ le corps des nombres complexes. On note H l'espace des suites $x = (a_j)_{j\geqslant 0}$ de nombres complexes telles que la série

$$\sum_{j=0}^{\infty} |a_j|^2$$

converge. Pour $(x, y) \in H \times H$ avec $x = (a_j)_{j\geqslant 0}$ et $y = (b_j)_{j\geqslant 0}$ on note

$$< x, y >= \sum_{j=0}^{\infty} \overline{a_j}\, b_j$$

et

$$||x|| = (\sum_{j=0}^{\infty} |a_j|^2)^{\frac{1}{2}} = (< x, x >)^{\frac{1}{2}}$$

On rappelle que l'espace H muni de la norme $||\ .\ ||$ est un espace de Banach, c'est-à-dire un espace vectoriel normé complet. Dans ce problème, la seule topologie qu'on considèrera sur l'espace H sera la topologie définie par la norme $||\ .\ ||$. Toutes les notions topologiques étudiées (ouvert, fermé, partie dense, compact,...) se refèreront donc à cette topologie. De même, la notion de suite de Cauchy se refèrera à la métrique issue de cette norme. Si $x \in H$ et $\alpha > 0$, on note $B(x; \alpha)$ la boule ouverte de centre x et de rayon α.

On rappelle que pour toute forme linaire continue f de H dans $\mathbf{C}$, il existe $x \in H$ tel que $f(y) =< x, y >$ pour tout $y \in H$. Si F est un sous-espace vectoriel fermé de H, on note $F^{\perp}$ le sous-ensemble de H défini par

$$F^{\perp} = \{\ x \in H;\ < x, y >= 0 \text{ pour tout } y \in F\}$$

On rappelle que $F^{\perp}$ est un sous-espace vectoriel fermé de H, et que l'on a $H = F \oplus F^{\perp}$.

On note $L(H)$ l'espace des applications linéaires continues de H dans H. Une application linéaire continue sera souvent appelée *opérateur*. Si $T \in L(H)$ et $x \in H$, on note Tx l'image de x par T, et

$$\mathrm{Ker}(T) = \{x \in H;\ Tx = 0\}$$

On note

$$\mathrm{Im}(T) = T(H) = \{y \in H;\ \text{il existe } x \in H \text{ tel que } y = Tx\}$$

Un opérateur $T \in L(H)$ sera dit à image dense si $\mathrm{Im}(T)$ est un sous-espace dense de H. Si S et T sont deux éléments de $L(H)$, on note simplement ST l'opérateur classiquement noté $S \circ T$ obtenu en composant T et S. On note $I \in L(H)$ l'opérateur identité tel que $Ix = x$ pour tout $x \in H$. Si $P \in \mathbf{C}[X]$ est un polynôme, qui s'écrit

$$P(X) = \sum_{k=0}^{k=n} a_k X^k$$

et $T \in L(H)$, on note $P(T)$ l'élément de $L(H)$ défini par

$$P(T) = \sum_{k=0}^{k=n} a_k T^k$$

où l'on rappelle que $T^0 = I$ pour tout opérateur T. Un opérateur $T \in L(H)$ est inversible s'il existe un opérateur $T^{-1} \in L(H)$ tel que $TT^{-1} = T^{-1}T = I$. Si S est un opérateur et G est une partie de H, on note $S(G)$ l'image directe de G et $[S]^{-1}(G)$ l'image réciproque de G par l'application S.

Pour tout $T \in L(H)$, on définit l'adjoint T^* de T par la formule

$$< T^*x, y > = < x, Ty >$$

pour tout $(x, y) \in H \times H$. Un scalaire $\lambda \in \mathbf{C}$ est dit valeur propre de T s'il existe $x \in H \backslash \{0\}$ tel que $Tx = \lambda x$. Un tel vecteur x est appelé vecteur propre. Pour tout $T \in L(H)$, on pose

$$\|T\|_L = \sup\{\ \|Tx\|;\ \|x\| \leqslant 1\}$$

On rappelle que l'espace $L(H)$ muni de la norme $\|.\|_L$ est un espace vectoriel normé complet.

Pour toute partie G d'un espace vectoriel Z, on note $vect(G)$ l'espace vectoriel engendré par G.

On rappelle enfin le lemme de Baire : si (E, d) est un espace métrique complet et

$$(U_n)_{n \geqslant 0}$$

est une suite d'ouverts denses dans (E, d), l'ensemble $(\bigcap_{n \geqslant 0} U_n)$ est une partie dense de (E, d).

La partie I est consacrée à des résultats préliminaires et à un exemple d'opérateur sur H. Dans la partie II, on établit une condition suffisante pour que l'orbite de certains vecteurs de H sous l'action d'un opérateur sur H soit dense dans H. On étudie dans la partie III la théorie spectrale des opérateurs, puis celle des opérateurs compacts. La partie IV présente la construction d'un sous-espace invariant commun à tous les opérateurs qui commutent avec un opérateur compact non nul donné. Enfin, on établit dans la partie V l'existence de fonctions dont l'orbite est dense pour les opérateurs différentiels non proportionnels à l'identité sur l'espace des applications holomorphes.

Les parties II, III, IV et V sont dans une large mesure indépendantes.

I. PRÉLIMINAIRES

1) Soit M une partie fermée non vide de H telle que $(\frac{x+y}{2}) \in M$ pour tout $(x, y) \in M \times M$. On pose

$$d_0 = \inf\{\ \|x\|;\ x \in M\}$$

Montrer que pour tout couple $(x, y) \in M \times M$, on a

$$\left\|\frac{x-y}{2}\right\|^2 \leqslant \frac{1}{2}(\|x\|^2 + \|y\|^2) - d_0^2$$

2) a) Soit (x_n) une suite d'éléments de M telle que

$$\lim_{n \to \infty} \|x_n\| = d_0$$

Montrer que (x_n) est une suite de Cauchy.

b) Montrer qu'il existe un unique $x \in M$ tel que $\|x\| = d_0$.

3) Soit $D_1 \in L(H)$ défini de la façon suivante: si $x = (a_j)_{j \geqslant 0} \in H$, on a

$$D_1 x = y = (b_j)_{j \geqslant 0}$$

avec pour tout $j \geqslant 0$,

$$b_j = a_{j+1}$$

a) Déterminer $\mathrm{Ker}(D_1)$ et $\mathrm{Im}(D_1)$.

b) Montrer que $\|D_1\|_L = 1$.

c) Pour tout $\lambda \in \mathbf{C}$ tel que $|\lambda| < 1$, soit $x_\lambda = (\lambda^j)_{j \geqslant 0} \in H$. Montrer que $D_1 x_\lambda = \lambda x_\lambda$

4) a) Montrer que pour tout $T \in L(H)$, l'adjoint T^* de T est continu et vérifie $\|T^*\|_L = \|T\|_L$.

b) Déterminer l'adjoint D_1^* de D_1. Montrer que $D_1 D_1^* = I$.

5) Soit $F = vect(\{\ x_\lambda;\ |\lambda| < 1\})$.

a) Montrer que si $g \in H$ satisfait

$$< g, x_\lambda > = 0$$

pour tout $\lambda \in \mathbf{C}$ tel que $|\lambda| < 1$, alors $g = 0$.

b) En déduire que F est dense dans H.

6) On pose

$$P = \bigcup_{k=1}^{\infty} Ker(D_1^k)$$

Tournez la page S.V.P.

a) Montrer que P est un sous-espace vectoriel dense de H.

b) Montrer que P contient une partie Q dénombrable et dense dans H (on admettra sans démonstration qu'une réunion finie ou dénombrable d'ensembles dénombrables est encore dénombrable).

II.VECTEURS HYPERCYCLIQUES

Soient $T \in L(H)$ et $x \in H$. On dira que x est $T-$ *hypercyclique* si l'ensemble

$$O_T(x) = \{\ T^k(x);\ k \geqslant 0\}$$

est dense dans H. On désignera par $\mathrm{Hyp}(T)$ l'ensemble (qui peut être vide) des vecteurs T-hypercycliques.

Soit Q une partie dénombrable dense de H. On énumère en une suite $(B_n)_{n\geqslant 0}$ l'ensemble des boules ouvertes de rayon rationnel dont le centre appartient à Q.

1) a) Montrer que si $x \in \mathrm{Hyp}(T)$, on a $T^k x \in \mathrm{Hyp}(T)$ pour tout $k \geqslant 1$.

b) Montrer que si $\mathrm{Hyp}(T)$ est non vide, alors $\mathrm{Hyp}(T)$ est dense dans H.

2) Pour tout entier $n \geqslant 0$, on note

$$G_n = \bigcup_{k\geqslant 0} \{[T^k]^{-1}(B_n)\}$$

a) Montrer que G_n est un sous-ensemble ouvert de H.

b) Montrer que $\mathrm{Hyp}(T) = \bigcap_{n\geqslant 0} G_n$.

c) Montrer l'équivalence des trois assertions suivantes :

(i) L'ensemble $\mathrm{Hyp}(T)$ est non vide.

(ii) Pour tout couple (U, V) d'ouverts non vides de H, il existe $k \geqslant 0$ tel que

$$T^k(U) \cap V \neq \emptyset$$

(iii) Pour tout $n \geqslant 0$, G_n est dense dans H.

3) a) Soient $(x, y) \in H \times H$ et $\varepsilon > 0$. Montrer que si $R \in L(H)$ vérifie les deux conditions suivantes:

$$R(B(x;\varepsilon)) \cap B(0;\varepsilon) \neq \emptyset$$

$$R(B(0;\varepsilon)) \cap B(y;\varepsilon) \neq \emptyset$$

alors on a

$$R(B(x;2\varepsilon)) \cap B(y;2\varepsilon) \neq \emptyset$$

b) En déduire que si $T \in L(H)$ satisfait : il existe un opérateur $S \in L(H)$ tel que $TS = I$ et une partie dense X de H telle que

$$\lim_{n\to\infty} T^n x = \lim_{k\to\infty} S^k x = 0$$

pour tout $x \in X$, alors $\mathrm{Hyp}(T) \neq \emptyset$.

4) On considère l'opérateur D_1 défini en I.3). Soit $\mu \in \mathbf{C}$ tel que $|\mu| > 1$. On pose $D_\mu = \mu D_1$.

a) Montrer que $D_\mu[\mu^{-1} D_1^*] = I$.

b) Montrer que $\mathrm{Hyp}(D_\mu) \neq \emptyset$.

c) Montrer que $\bigcap_{k\geqslant 1} \mathrm{Hyp}((D_\mu)^k) \neq \emptyset$.

5) En déduire un exemple d'opérateur $T \in L(H)$ tel que $\mathrm{Hyp}(T) \neq \emptyset$ et tel que l'espace vectoriel engendré par les vecteurs propres de T soit dense dans H.

6) a) Soit $T \in L(H)$ tel que $\mathrm{Hyp}(T) \neq \emptyset$. Montrer que pour tout $x \in \mathrm{Hyp}(T)$ et tout $y \in H\backslash\{0\}$, l'ensemble

$$\{\ < y, T^n x >;\ n \geqslant 0\ \}$$

est dense dans $\mathbf{C}$.

b) Montrer que l'opérateur transposé T^* n'a pas de vecteur propre.

c) Montrer que pour tout polynôme non nul $P \in \mathbf{C}[X]\backslash\{0\}$, l'opérateur $P(T)$ a une image dense.

7) a) Montrer que si $x \in \mathrm{Hyp}(T)$ et $P \in \mathbf{C}[X]\backslash\{0\}$, on a $P(T)(x) \in \mathrm{Hyp}(T)$.

b) En déduire que si $\mathrm{Hyp}(T) \neq \emptyset$, il existe un sous-espace dense J de H tel que $J\backslash\{0\}$ soit contenu dans l'ensemble $\mathrm{Hyp}(T)$.

[redacted]

1) Montrer que pour tout couple $(S,T) \in L(H) \times L(H)$, on a

$$||ST||_L \leqslant ||S||_L.||T||_L$$

2) a) Soit $N \in L(H)$ tel que $||N||_L < 1$. Montrer que la série

$$\sum^{\infty}(-N)^n$$

c) Montrer que

$$\lim_{n\to\infty}[\sup\{(\|T^k\|_L)^{\frac{1}{k}};\ k \geqslant n\}] \leqslant \rho(T)$$

7) a) Soit $n \geqslant 1$. Montrer qu'il existe $S \in L(H)$ tel que

$$(T^n - \lambda^n I) = S(T - \lambda I) = (T - \lambda I)S$$

b) En déduire que si $\lambda \in \sigma(T)$, alors $\lambda^n \in \sigma(T^n)$ pour tout $n \geqslant 1$.

c) Montrer que la suite $((\|T^n\|_L)^{\frac{1}{n}})_{n\geqslant 1}$ converge vers $\rho(T)$.

8) Soit $\lambda \in \mathbf{C}$ tel qu'il existe un réel $M > 0$ tel que

$$\|x\| \leqslant M\|(T - \lambda I)x\| \tag{3}$$

pour tout $x \in H$. Soit $\mu \in \mathbf{C}$ tel que

$$|\lambda - \mu| < \frac{1}{2M} \tag{4}$$

a) On suppose que λ et μ vérifient les équations (3) et (4). Montrer que $\|x\| \leqslant 2M\|(T - \mu I)x\|$ pour tout $x \in H$. Montrer que si l'on pose $y = (T - \mu I)x$, on a $\|y - (T - \lambda I)x\| \leqslant 2M|\lambda - \mu|\ \|y\|$.

b) Montrer que si $\lambda \in \sigma(T)$ vérifie (3), on a $\mu \in \sigma(T)$ pour tout μ satisfaisant (4).

c) Déduire de ce qui précède que si $\lambda \in \sigma(T)$ satisfait $|\lambda| = \rho(T)$, il existe une suite (x_n) dans X telle que $\|x_n\| = 1$ pour tout $n \geqslant 1$ et $\lim_{n\to\infty} \|Tx_n - \lambda x_n\| = 0$.

Un opérateur $R \in L(H)$ est appelé opérateur de rang fini si son image $\mathrm{Im}(R)$ est un espace vectoriel de dimension finie. Un opérateur A est dit compact si l'adhérence de l'ensemble $A(B(0;1))$ (c'est à dire de l'image par A de la boule unité de H) est un sous-ensemble compact de H.

9) a) Soit $A \in L(H)$ un opérateur. Montrer l'équivalence des deux assertions suivantes:

(i) A est un opérateur compact.

(ii) Il existe une suite $(R_n)_{n\geqslant 0}$ d'opérateurs de rang fini telle que

$$\lim_{n\to\infty} \|A - R_n\|_L = 0$$

(Pour construire la suite (R_n), on pourra considérer des projections orthogonales sur des sous-espaces de dimension finie bien choisis).

b) Montrer que A est compact si et seulement si A^* est compact.

10) Soit A un opérateur compact tel que $\rho(A) > 0$. Montrer que si $\lambda \in \sigma(A)$ est tel que $|\lambda| = \rho(A)$, alors l'espace $\mathrm{Ker}(A - \lambda I)$ est un sous-espace non réduit à $\{0\}$ de H.

11) Déduire de ce qui précède que si A est compact, l'ensemble $\mathrm{Hyp}(A)$ est vide (on pourra distinguer les cas $\rho(A) = 0$ et $\rho(A) \neq 0$).

IV. VECTEURS MINIMAUX. VECTEURS STABLES

1) Soit $T \in L(H)$ à image dense, soit $x \in H\backslash\{0\}$ et soit $\varepsilon \in]0, \|x\|[$.

a) Montrer qu'il existe un unique $y \in H$ tel que les deux conditions suivantes soient vérifiées:

$$\|Ty - x\| \leqslant \varepsilon$$

et

$$\|y\| = \inf\{\ \|v\|;\ \|Tv - x\| \leqslant \varepsilon\ \}$$

b) Montrer qu'on a alors

$$\|Ty - x\| = \varepsilon$$

On appellera *vecteur minimal* relativement à (T, x, ε) le vecteur y ainsi défini.

2) Soient $v \in H\backslash\{0\}$ et $w \in H$. Montrer que la fonction $r : \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}$ définie par $r(t) = \|v + tw\|$ est continuement dérivable sur un voisinage de 0, et calculer $r'(0)$.

3) Soit (T, x, ϵ) vérifiant les conditions du 1) et soit $y \in H$ minimal relativement à (T, x, ε). Soit $u \in H$ arbitraire. On note $Re(z)$ la partie réelle de $z \in \mathbf{C}$.

a) Montrer que si $Re(< T^*(Ty - x), u >) < 0$, il existe $t_0 > 0$ tel que la fonction $g(t) = \|T(y + tu) - x\|$ soit décroissante sur $[0, t_0]$.

b) Montrer qu'alors

$$\|y + tu\| \geqslant \|y\|$$

pour tout $t \in [0, t_0]$, et que $Re(< y, u >) \geqslant 0$.

c) En déduire qu'il existe $\delta > 0$ tel que $y = -\delta T^*(Ty - x)$.

d) Montrer que si $v \in H$ et $< v, y >= 0$, on a $< Tv, Ty - x >= 0$.

e) Établir les égalités:

$$< Ty - x, Ty >= -\frac{\|y\|^2}{\delta}$$

et

$$\|x - Ty\|^2 =< x - Ty, x > + < Ty - x, Ty >$$

f) En déduire que $< x - Ty, x >\geqslant \varepsilon^2$.

Dans toute la suite, $A \in L(H)$ désigne un opérateur compact non identiquement nul, et $Com(A)$ désigne le

b) Montrer que pour tout $k \geqslant 1$, on a

$$< x, A^{n(k)}(y_{n(k)}) - x > \leqslant -\varepsilon^2$$

c) Montrer que le vecteur s est stable pour A.

8) Conclure de ce qui précède que si A est un opérateur compact non nul, il existe un vecteur stable pour A. En déduire qu'il existe un sous-espace fermé L de H, distinct de H et non réduit à $\{0\}$, tel que $T(L)$ soit inclus dans L pour tout opérateur $T \in \mathrm{Com}(A)$.

9) Montrer que les conclusions ci-dessus subsistent sous l'hypothèse suivante : A est un opérateur non nul et il existe un entier $n \geqslant 1$ tel que A^n soit compact.

V. HYPERCYCLICITÉ DES OPÉRATEURS DIFFÉRENTIELS

Soit $\mathcal{E}$ l'espace des applications holomorphes de $\mathbf{C}$ dans $\mathbf{C}$. Pour tout $f \in \mathcal{E}$ et tout entier $n \geqslant 1$, on note $r_n(f)$ la restriction de f à l'ensemble $D(0,n) = \{ z \in \mathbf{C};\ |z| \leqslant n \}$, et on pose

$$||f||_n = \sup\{ |f(z)|;\ |z| \leqslant n\}$$

On note $f^{(k)}$ *la dérivée k-ième* d'une fonction f, avec $f^{(0)} = f$ et $f^{(1)} = f'$. Pour $(f,g) \in \mathcal{E} \times \mathcal{E}$, on définit

$$d(f,g) = \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} \inf(1, ||f-g||_n)$$

1) a) Montrer que d est une distance sur $\mathcal{E}$.

b) Soit (f_k) une suite dans $\mathcal{E}$. Montrer que $\lim_{k\to\infty} d(f_k, g) = 0$ si et seulement si la suite (f_k) converge vers g uniformément sur tout compact de $\mathbf{C}$.

c) Montrer que $(\mathcal{E}, d)$ est un espace métrique complet.

d) Montrer brièvement que l'application V de $\mathbf{C}^2 \times \mathcal{E}^2$ dans $\mathcal{E}$ définie par

$$V(\alpha, \beta, f, g) = \alpha f + \beta g$$

est continue lorsque $\mathcal{E}$ est muni de la topologie définie par la distance d.

La seule topologie qu'on considérera sur $\mathcal{E}$ sera la topologie définie par la distance d. En particulier, la notation

$$f = \sum_{k=0}^{\infty} f_k$$

où les fonctions f_k et f sont dans $\mathcal{E}$, signifiera que

$$\lim_{n\to\infty} d(f, \sum_{k=0}^{n} f_k) = 0$$

2) Soit $\phi : \mathcal{E} \longrightarrow \mathbf{C}$ une forme linéaire. Montrer l'équivalence entre les deux assertions suivantes:

(i) ϕ est continue de $(\mathcal{E}, d)$ dans $\mathbf{C}$.

(ii) Il existe un entier $n \geqslant 1$ tel que

$$|\phi(f)| \leqslant n||f||_n$$

pour tout $f \in \mathcal{E}$.

On notera $\mathcal{E}^*$ l'espace vectoriel des formes linéaires continues sur $(\mathcal{E}, d)$.

3) On rappelle le *théorème de Hahn-Banach* suivant: si V est un espace normé sur $\mathbf{C}$ et W est un sous-espace vectoriel fermé de V distinct de V, Il existe une forme linéaire continue non nulle ψ sur V telle que $\psi(w) = 0$ pour tout $w \in W$.

a) Soit $\mathcal{G}$ un sous-ensemble de $\mathcal{E}$. Montrer que $\mathcal{G}$ est dense dans $\mathcal{E}$ si et seulement si $r_n(\mathcal{G})$ est dense dans $(r_n(\mathcal{E}), ||\ .\ ||_n)$ pour tout $n \geqslant 1$.

b) Montrer que si un sous-espace vectoriel $\mathcal{Z}$ de $\mathcal{E}$ n'est pas dense dans $\mathcal{E}$, il existe $\phi \in \mathcal{E}^*\backslash\{0\}$ telle que $\phi(f) = 0$ pour tout $f \in \mathcal{Z}$.

4) Pour tout $\lambda \in \mathbf{C}$, on définit $e_\lambda \in \mathcal{E}$ par

$$e_\lambda(z) = e^{\lambda z}$$

Pour tout entier $k \geqslant 0$, on définit $p_k \in \mathcal{E}$ par

$$p_k(z) = z^k$$

Pour tout $\phi \in \mathcal{E}^*$, on définit $F_\phi : \mathbf{C} \to \mathbf{C}$ par

$$F_\phi(\lambda) = \phi(e_\lambda)$$

Montrer que F_ϕ est une fonction dérivable de la variable complexe, qui vérifie les équations $F_\phi(0) = \phi(p_0)$ et $F'_\phi(0) = \phi(p_1)$. Montrer plus généralement qu'on a pour tout $k \geqslant 0$,

$$F_\phi^{(k)}(0) = \phi(p_k)$$

5) Montrer que si U est un ouvert non vide de $\mathbf{C}$, l'espace

$$\mathcal{E}_U = vect(\{\ e_\lambda;\ \ \lambda \in U\ \})$$

est dense dans $\mathcal{E}$.

6) Pour tout $z \in \mathbf{C}$, on note

$$\tau_z : \mathcal{E} \to \mathcal{E}$$

l'opérateur de translation par z, tel que

$$(\tau_z f)(w) = f(z+w)$$

On note $D : \mathcal{E} \to \mathcal{E}$ l'opérateur de dérivation, tel que $D(f) = f'$.

a) Montrer que τ_z et D sont des applications linéaires continues de $(\mathcal{E}, d)$ dans $(\mathcal{E}, d)$.

b) Montrer que

$$\tau_z f = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(z)}{k!} p_k$$

7) Soit $T : \mathcal{E} \to \mathcal{E}$ une application linéaire continue telle que

$$\tau_z T = T \tau_z \tag{5}$$

pour tout $z \in \mathbf{C}$. Dans toute la suite du problème, on supposera que T vérifie l'équation (5) pour tout $z \in \mathbf{C}$. Pour tout $f \in \mathcal{E}$, on pose

$$\psi(f) = (Tf)(0)$$

a) Montrer que $\psi \in \mathcal{E}^*$.

b) Montrer qu'il existe $n \geqslant 1$ tel que pour tout $k \geqslant 0$,

$$|\psi(p_k)| \leqslant n^{k+1}$$

c) Montrer que pour tout $f \in \mathcal{E}$, on a

$$Tf = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\psi(p_k)}{k!} D^k f$$

8) Pour tout $w \in \mathbf{C}$, on pose

$$F(w) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\psi(p_k)}{k!} w^k$$

a) Montrer que F est bien définie et que $F \in \mathcal{E}$. Déterminer F dans le cas $T = \tau_z$.

b) Montrer que pour tout $\lambda \in \mathbf{C}$, on a

$$T(e_\lambda) = F(\lambda) e_\lambda$$

9) On suppose désormais que l'opérateur T, qui vérifie (5), n'est pas proportionnel à l'identité de $\mathcal{E}$.

a) Montrer que F n'est pas constante.

b) On note

$$F(\mathbf{C}) \cap \{\ z \in \mathbf{C};\ \ |z| < 1\ \} = U_1$$

et

$$F(\mathbf{C}) \cap \{\ z \in \mathbf{C};\ \ |z| > 1\} = U_2$$

Montrer que les espaces $\mathcal{E}_{U_1}$ et $\mathcal{E}_{U_2}$ (voir la question V.5) sont denses dans $\mathcal{E}$.

Tournez la page S.V.P.

10) a) Montrer que

$$\lim_{n\to\infty} T^n f = 0$$

pour tout $f \in \mathcal{E}_{U_1}$.

b) Montrer que T est une bijection de $\mathcal{E}_{U_2}$ sur $\mathcal{E}_{U_2}$. On note

$$T^{-1} = S : \mathcal{E}_{U_2} \to \mathcal{E}_{U_2}$$

son inverse.

c) Montrer que $\lim_{n\to\infty} S^n f = 0$ pour tout $f \in \mathcal{E}_{U_2}$.

11) Montrer que si T est une application linéaire continue de $\mathcal{E}$ dans $\mathcal{E}$ qui vérifie (5) pour tout $z \in \mathbf{C}$ et qui n'est pas proportionnelle à l'identité, alors T a des vecteurs hypercycliques, c'est-à-dire qu'il existe $f \in \mathcal{E}$ tel que

$$\{\, T^n f;\ n \geqslant 0\}$$

soit dense dans $\mathcal{E}$ (on pourra utiliser les méthodes de la partie II, en particulier des questions II.2) et II.3)).

12) On note $\mathcal{C}^\infty(\mathbf{R})$ l'espace des fonctions indéfiniment dérivables de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$, muni de la distance δ définie par

$$\delta(f,g) = \sum_{n=0}^{\infty} 2^{-n} \inf(1, N_n(f-g))$$

où

$$N_n(h) = \sup\{|h^{(n)}(t)|;\ |t| \leqslant n\,\}$$

Soit $i : \mathbf{R} \to \mathbf{C}$ l'injection naturelle. On définit

$$\Re : \mathcal{E} \to \mathcal{C}^\infty(\mathbf{R})$$

par la formule

$$\Re(f) = Re(f \circ i)$$

où $Re(z)$ désigne la partie réelle du nombre complexe z.

a) Montrer que $\Re$ est une application linéaire continue de $(\mathcal{E}, d)$ dans $(\mathcal{C}^\infty(\mathbf{R}), \delta)$.

b) Montrer que $\Re(\mathcal{E})$ contient les fonctions polynômes réelles. En déduire que $\Re(\mathcal{E})$ est dense dans $(\mathcal{C}^\infty(\mathbf{R}), \delta)$.

c) Soit D_r l'opérateur de dérivation de $\mathcal{C}^\infty(\mathbf{R})$ dans $\mathcal{C}^\infty(\mathbf{R})$, tel que $D_r(f) = f'$. Montrer que

$$\Re D = D_r \Re$$

d) Soit $P \in \mathbf{R}[X]$ un polynôme non constant. On note $T_r = P(D_r)$ l'opérateur différentiel correspondant sur $\mathcal{C}^\infty(\mathbf{R})$. Montrer que T_r a des vecteurs hypercycliques, c'est-à-dire qu'il existe $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbf{R})$ tel que $\{\, T_r^n f;\ n \geqslant 0\}$ soit dense dans $(\mathcal{C}^\infty(\mathbf{R}), \delta)$.

13) Déduire en particulier de ce qui précède qu'il n'existe pas de norme sur $\mathcal{E}$ qui définisse la même topologie que la distance d, ni de norme sur $\mathcal{C}^\infty(\mathbf{R})$ qui définisse la même topologie que la distance δ.