Coniques garanties sans géométrie projective

Michel Coste

10 septembre 2008

Objectif : dire des choses intéressantes en se limitant aux coniques réelles, sans utiliser de géométrie projective.

1 Qu'est-ce qu'une conique ?

1.1 La définition

On se place dans un plan affine réel, avec des coordonnées cartésiennes (x, y). Une conique est définie par son équation $f(x, y) = 0$, où f est un polynôme du second degré ; deux équations définissent la même conique si et seulement si l'une est multiple de l'autre par une constante non nulle. Autrement dit, l'ensemble des coniques est le quotient de l'ensemble des polynômes réels de degré total 2 en x, y par la relation d'équivalence : $f \sim g$ quand il existe $\lambda \in \mathbb{R}^\times$ tel que $f = \lambda\, g$ ([Au1] p.171, [Au2] p.223).

L'équation[1] d'une conique s'écrit donc

$$(*) \qquad f(x,y) = \alpha\, x^2 + 2\beta\, x\, y + \gamma\, y^2 + 2\delta\, x + 2\varepsilon\, y + \varphi = 0\ ,$$

où $\alpha, \ldots, \varphi$ sont réels et α, β, γ ne sont pas tous les trois nuls.

Nous n'avons pas défini les coniques comme ensembles de points. L'ensemble des points (x, y) du plan affine réel qui satisfont l'équation de la conique est appelé l'image de la conique. Nous verrons plus loin que les coniques propres non vides (ellipses, hyperboles et paraboles) sont déterminées par leurs images ; ces coniques peuvent donc se définir comme ensembles de points. Mais par exemple les coniques $x^2 + y^2 + 1 = 0$ et $x^2 + 1 = 0$ sont différentes, bien qu'elles aient toutes les deux une image vide.

[1] On se permet cet abus de langage, alors que l'équation n'est définie qu'à un facteur près

1.2 Forme matricielle de l'équation d'une conique

L'équation $(*)$ peut s'écrire sous la forme matricielle suivante :

$$f(x,y) = (x \quad y \quad 1) \begin{pmatrix} \alpha & \beta & \delta \\ \beta & \gamma & \varepsilon \\ \delta & \varepsilon & \varphi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} = 0 \, .$$

Notons Q la matrice symétrique 3×3 de l'équation de la conique, et q son bloc 2×2 supérieur gauche, qui est la matrice de la partie quadratique de l'équation. On s'autorisera à confondre une matrice symétrique avec la forme quadratique qu'elle représente, et on écrira ainsi

$$\begin{aligned} q(x,y) &= \alpha\, x^2 + 2\beta\, x\, y + \gamma\, y^2 \\ Q(x,y,z) &= \alpha\, x^2 + 2\beta\, x\, y + \gamma\, y^2 + 2\delta\, x\, z + 2\varepsilon\, y\, z + \varphi\, z^2 \end{aligned}$$

La forme Q est l'*homogénéisée* de l'équation de la conique[2].

1.3 Changement de coordonnées affine

La définition des coniques ne dépend pas du choix des coordonnées cartésiennes. Étudions l'effet d'un changement de coordonnées affine sur l'équation d'une conique.

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} + B \quad \text{autrement écrit} \quad \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{pmatrix} ,$$

où A est une matrice dans $\mathrm{GL}(2,\mathbb{R})$ et B un vecteur colonne à deux composantes réelles. Remarquons que $G = \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ est dans $\mathrm{GL}(3,\mathbb{R})$ [3]. Alors l'équation de la conique dans les coordonnées (x', y') est donnée par la matrice $Q' = {}^t\!GQG$, et sa partie quadratique par la matrice $q' = {}^t\!A\, q\, A$ [4]. Les matrices symétriques Q et Q' sont congruentes (et ont donc même signature) ; les sous-matrices q et q' sont aussi congruentes et ont même signature.

1.4 Conique par cinq points

Donnons nous cinq points dans le plan affine, tels qu'il n'y en ait pas quatre alignés parmi eux. On se propose de montrer qu'il existe une unique

[2]C'est en fait l'équation de la conique projective associée.

[3]Ceci permet de voir le groupe affine de $\mathbb{R}^2$ comme sous-groupe de $\mathrm{GL}(3,\mathbb{R})$.

[4]La partie quadratique de l'équation est transformée par la partie linéaire du changement de coordonnées

conique passant par ces cinq points (comparer avec [Ber], 16.1.4) ou [Au2], p. 246).

On peut choisir parmi les cinq points un groupe de quatre tels que trois d'entre eux ne sont jamais alignés (vérifiez !). On choisit alors un repère affine pour que ces quatre points aient comme coordonnées $(0,0),(a,0),(0,b),(1,1)$. On a $a\neq 0$, $b\neq 0$ et $a+b-ab\neq 0$ (que traduit cette dernière inégalité ?). Soit (u,v) les coordonnées du cinquième point ; tout ce qu'on lui demande, c'est d'être différent des précédents. Pour chaque point (x_i,y_i) la condition pour une conique de passer par ce point s'écrit

$$\alpha\, x_i^2 + 2\beta\, x_i\, y_i + \gamma\, y_i^2 + 2\delta\, x_i + 2\varepsilon\, y_i + \varphi = 0\ .$$

Cette équation est une équation linéaire homogène en les six inconnues $\alpha,\ldots,\varphi$. On a un système de cinq équations linéaires homogènes en six inconnues ; ce système est de rang 5 au maximum, et il a donc forcément une solution non triviale (différente de la solution nulle). Montrer qu'il y a unicité de la conique passant par les cinq points revient à montrer que ce système est de rang exactement 5 ; en effet l'espace des solutions aura alors dimension 1, et les solutions non nulles sont proportionnelles entre elles. La condition de passage par $(0,0)$ donne $\varphi=0$. La condition de passage par $(a,0)$ donne $\delta=-a\alpha$, la condition de passage par $(0,b)$ donne $\varepsilon=-b\gamma$. On est arrivé à $\alpha\,(x^2-ax)+2\beta\,xy+\gamma\,(y^2-by)=0$. Les deux dernières conditions de passage par $(1,1)$ et (u,v) se traduisent par le système linéaire en α,β,γ suivant :

$$\left\{\begin{array}{ccccccc} (1-a)\,\alpha & + & 2\,\beta & + & (1-b)\,\gamma & = & 0 \\ (u^2-au)\,\alpha & + & 2uv\,\beta & + & (v^2-bv)\,\gamma & = & 0 \end{array}\right. .$$

La lectrice est priée de vérifier que ce système est toujours de rang deux, sous les hypothèses posées.

2 Forme réduite et classification affine.

2.1 Le problème de la classification

La formule écrite ci-dessus pour le changement de coordonnées décrit aussi l'action du groupe affine du plan sur l'ensemble des coniques. Classifier les coniques affines, c'est décrire les orbites de cette action. De manière précise, deux coniques d'équations $f(x,y)=0$ et $f'(x,y)=0$ sont dans la même orbite pour l'action du groupe affine de $\mathbb{R}^2$ si et seulement s'il existe un élément G de ce groupe et une constante $\lambda\in\mathbb{R}^\times$ tels que $f'(x,y)=\lambda\, f(G(x,y))$. Si Q et Q' sont les matrices des formes quadratiques en trois variables homogénéisées de f et f' respectivement, et $G = \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, ceci s'écrit $Q' = \lambda\, {}^t\!GQG$ (et on a alors $q' = \lambda\, {}^t\!AqA$ pour les parties quadratiques des équations).

On décrit les orbites en donnant un représentant distingué pour chacune de ces orbites. Du point vue des changements de coordonnées, la liste des représentants fournit une liste d'équations réduites : pour chaque conique il existe une unique équation réduite de la liste qui est son équation dans un repère affine bien choisi.

2.2 Mise sous forme réduite

L'outil qui va nous servir pour la classification affine est la classification des formes quadratiques réelles par la signature (basée sur la décomposition des formes quadratiques en carrés et le théorème d'inertie de Sylvester, voir [Ber] 13.4, [Au1] p.206, [Au2] p.267). De façon précise : si q est une forme quadratique réelle non nulle en deux variables, il existe un changement de coordonnées linéaire qui met q sous l'une des formes suivantes

1) $x^2 + y^2$, si q est de signature $(2, 0)$;
1') $-x^2 - y^2$, si q est de signature $(0, 2)$;
2) $x^2 - y^2$, si q est de signature $(1, 1)$;
3) y^2, si q est de signature $(1, 0)$;
3') $-y^2$, si q est de signature $(0, 1)$.

Par changement linéaire de coordonnées on peut donc ramener la partie quadratique de l'équation d'une conique à l'une des formes ci-dessus ; en fait, comme on peut multiplier l'équation par -1 sans changer la conique, on peut se limiter aux formes 1), 2) et 3). Pour trouver concrètement un changement de coordonnées adéquat, on utilise bien entendu l'algorithme de Gauss.

Poursuivons la réduction des équations dans chacun des trois cas.

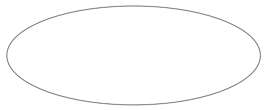
Cas 1) : la signature de q est $(2, 0)$ ou $(0, 2)$. On a donc, après changement linéaire de coordonnées, une équation

$$x^2 + y^2 + 2\delta\, x + 2\varepsilon\, y + \varphi = 0 \, .$$

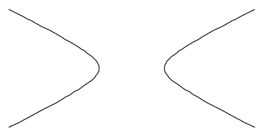
On peut faire disparaître les termes du 1er degré par le changements de coordonnées $x = x' - \delta$, $y = y' - \varepsilon$ (on prend le point $(-\delta, -\varepsilon)$ comme nouvelle origine). Après changement affine de coordonnées on s'est donc ramené à une équation

$$x^2 + y^2 + \varphi = 0$$

(avec un φ en général différent de celui ci-dessus). Si $\varphi \neq 0$, on peut encore faire le changement linéaire $x = \sqrt{|\varphi|}\, x'$, $y = \sqrt{|\varphi|}\, y'$ et diviser l'équation obtenue par $|\varphi|$. On obtient finalement les trois cas suivants :

ellipse	$x^2 + y^2 - 1 = 0$	
ellipse imaginaire	$x^2 + y^2 + 1 = 0$	$\emptyset$
droites imaginaires conjuguées sécantes	$x^2 + y^2 = 0$	$\bullet$

Cas 2) : la signature de q est $(1, 1)$. On procède de la même manière que pour le cas 1, en complétant les carrés pour faire disparaitre les termes linéaires puis en ramenant le terme constant à ± 1 s'il est non nul. On remarque ici qu'on passe de $x^2 - y^2 + 1 = 0$ à $x^2 - y^2 - 1 = 0$ par le changement linéaire qui consiste à échanger x et y. On obtient ainsi seulement deux cas :

hyperbole	$x^2 - y^2 - 1 = 0$	
droites sécantes	$x^2 - y^2 = 0$	

Cas 3) : la signature de q est $(0, 1)$. On a donc, après changement linéaire de coordonnées, une équation

$$y^2 + 2\delta\, x + 2\varepsilon\, y + \varphi = 0\ .$$

On peut d'abord faire disparaître le terme en y en complétant le carré (en posant $y = y' - \varepsilon$)). On obtient ainsi une équation

$$y^2 + 2\delta\, x + \varphi = 0\ .$$

Si $\delta \neq 0$, on fait le changement de coordonnées affine $x = \dfrac{-1}{2\delta}\,(x' + \varphi)$. Si $\delta = 0$ et $\varphi \neq= 0$, on fait le changement de coordonnées $y = \sqrt{|\varphi|}\, y'$. Si $\delta = \varphi = 0$, on ne change rien. On obtient ainsi un des cas suivants :

parabole	$y^2 - x = 0$
droites parallèles	$y^2 - 1 = 0$
droites imaginaires conjuguées parallèles	$y^2 + 1 = 0$
droite double	$y^2 = 0$

Au total, on arrive à 9 équations réduites.

2.3 Invariants pour l'action du groupe affine

Pour s'assurer que ces neuf équations réduites correspondent bien à des orbites différentes sous l'action du groupe affine, on peut regarder les images dans chacun des neuf cas : on ne peut passer de l'une à l'autre par une transformation affine du plan (qui préserve les droites et préserve aussi la compacité et la connexité puisque c'est un homéomorphisme) – sauf pour les deux cas présentant des images vides.

Le mieux est d'utiliser des invariants des coniques sous l'action du groupe affine : on peut associer à une conique la signature (s,t) de la forme homogénéisée Q à l'échange $(s,t) \mapsto (t,s)$ prés (correspondant à la multiplication de l'équation par une constante < 0), et la signature de q, toujours à l'échange $(s,t) \mapsto (t,s)$ près. On a remarqué à la fin de la section 1.3 qu'on obtient ainsi des invariants pour l'action du groupe affine. Voici le tableau des valeurs de ces invariants dans les neuf cas, qui montre bien qu'ils correspondent à des orbites différentes. Puisqu'on peut choisir entre (s,t) et (t,s), on choisit les signatures (s,t) avec $s \geq t$.

	signature de Q	signature de q
ellipse	(2,1)	(2,0)
hyperbole	(2,1)	(1,1)
parabole	(2,1)	(1,0)
ellipse imaginaire	(3,0)	(2,0)
droites sécantes	(1,1)	(1,1)
droites parallèles	(1,1)	(1,0)
droites imaginaires conjuguées sécantes	(2,0)	(2,0)
droites imaginaires conjuguées parallèles	(2,0)	(1,0)
droite double	(1,0)	(1,0)

Ce qui précède peut nous servir à reconnaître les différents types de coniques affines sur leur équation, par le calcul du déterminant de q et de celui de Q. Prenons un exemple : considérons la conique d'équation

$$2x^2 - 6xy + 5y^2 + 2y + 1 = 0 \; .$$

La matrice de la forme quadratique homogénéisée Q est $\begin{pmatrix} 2 & -3 & 0 \\ -3 & 5 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.
Le déterminant de la partie quadratique q (c'est le discriminant $\alpha\gamma - \beta^2$) est $2 \times 5 - 3^2 = 1 > 0$. Donc q est définie, et définie positive puisque les coefficients de x^2 et y^2 sont positifs. La conique est donc soit une ellipse, soit une ellipse imaginaire, soit deux droites imaginaires conjuguées séquentes. La distinction entre ces trois cas se fait facilement en calculant le déterminant de Q, qui vaut -1. La signature de Q est donc forcément $(2, 1)$ ou $(0, 3)$, et comme la trace est positive ce ne peut pas être $(0, 3)$. La conique est bien une ellipse.

2.4 Coniques propres

Les coniques propres sont celles des qutre premiers types ci-dessus : ellipses, paraboles, hyperboles, ellipses imaginaires. Autrment dit, ce sont les coniques qui ne sont pas réunion de deux droites (réelles distinctes ou confondues, ou imaginaires conjuguées), Le critère, qui se généralise aux quadriques en dimension plus grande, est que la forme quadratique homogénéisée Q est non dégénérée (son déterminant est non nul). Parmi les coniques propres, celles qui sont intéressantes d'un point de vue géométrique sont celles qui ont une image non vide. Souvent dans les livres l'appellation de conique propre est réservée aux coniques propres non vides.

2.5 Coniques à centre, détermination du centre

Une conique d'équation $f(x, y) = 0$ est une conique de centre le point O si la symétrie centrale de centre O préserve la conique et que O est l'unique point du plan affine avec cette propriété. Il s'agit bien d"une notion affine (c.-à-d. préservée par les transformations affines du plan).

Remarquons que la transformation $(x, y) \mapsto (-x, -y)$ laisse la partie quadratique de l'équation $f(x, y)$ inchangée (ainsi bien sûr que la constante) et change de signe la partie linéaire. Donc la symétrie de centre l'origine laisse la conique inchangée si et seulement si son équation ne contient pas de terme du premier degré. Écrivons l'équation de la conique sous la forme

$$(x \; y) \, q \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + 2 \, (x \; y) \begin{pmatrix} \delta \\ \varepsilon \end{pmatrix} + \varphi = 0 \; .$$

Le changement d'origine $x = x_0 + x',\ y = y_0 + y'$ donnera comme terme du premier degré de l'équation en x', y' :

$$2\,(x'\ y')\left(q\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \delta \\ \varepsilon \end{pmatrix}\right).$$

On conclut donc : les coniques à centre sont celles pour lesquelles la partie quadratique q de l'équation est non dégénérée, et les coordonnées (x_0, y_0) du centre sont l'unique solution du système $q\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \delta \\ \varepsilon \end{pmatrix} = 0$. Pour l'ellipse étudiée ci-dessus, le centre est la solution de $2x_0 - 3y_0 = 0,\ -3x_0 + 5y_0 + 1 = 0$, soit $(-3, -2)$.

La suite prochainement sur cet écran...

Références

[Au1] M. Audin : *Géométrie.* Belin, 1998

[Au2] M. Audin : *Géométrie.* EDP Sciences, 2006

[Ber] M. Berger : *Géométrie.* Cedic - Fernand Nathan, 1979

[LeBk] D. Lehmann et R. Bkouche : *Initiation à la géométrie.* PUF, 1988