Université de Rennes 1
Année 2009/2010

Agrégation

Exercices (anneaux de polynômes)

1 - Les polynômes P suivants sont-ils irréductibles sur $\mathbf{Z}$? sur $\mathbf{Q}$?
(i) $P = X^4 + 1$;
(ii) $P = X^3 - 3X^2 - 1$;
(ii) $P = X^2 + XY + 1$.

2 - Soit $P \in \mathbf{R}[X]$ tel que $P(x) \geq 0$ pour tout $x \in \mathbf{R}$. Montrer qu'il existe $P_1, P_2 \in \mathbf{R}[X]$ tels que $P = P_1^2 + P_2^2$.

3 - Soit K un corps.
(i) Soit $\Phi : K[X] \to K[X]$ un homomorphisme de K-algèbres tel que $\Phi(X) \neq 0$. Montrer que Φ est injectif.
(ii) Déterminer tous les automorphismes $\Phi : K[X] \to K[X]$ de la K-algèbre $K[X]$.
(iii) Soit $\Phi : K[X,Y] \to K[X,Y]$ défini par

$$\Phi(X) = X \qquad \text{et} \qquad \Phi(Y) = Y + X^2$$

est un automorphisme de la K-algèbre $K[X,Y]$.

4 - Soit A un anneau commutatif unitaire et intègre.
(i) Soit $P \in A[X,Y]$. Montrer que P est divisible par $X - Y$ si et seulement si $P(X,X) = 0$.
(ii) Soient I_1, I_2, I_3 les idéaux de $A[X,Y,Z]$ engendrés par $X - Y$, $Y - Z$ et $Z - X$ respectivement. Montrer que l'idéal $I = I_1 \cap I_2 \cap I_3$ est engendré par $(X - Y)(Y - Z)(Z - X)$.
(iii) Supposons que $A = K$ soit un corps de caractéristique $\neq 2$. Soit $P \in K[X,Y]$ un polynôme symétrique et divisible par $X - Y$. Montrer que P est divisible par $(X - Y)^2$.

5 - Soient K un corps de caractéristique $\neq 2$ et $n \geq 1$ un entier. Montrer que $X^2 + Y^2 - 1$ est irréductible dans $K[X,Y]$. Que se passe-t-il si la caractéristique de K est 2

6 - (Irréductibilité du déterminant) Soient K un corps et $n \geq 1$ un entier. On considère l'anneau $K[(X_{ij})_{1\leq i\leq n}]$ des polynômes en les n^2 indéterminées

X_{ij} à coefficients dans K. Montrer que

$$D_n = \det\left((X_{ij})_{1\leq i\leq n}\right) \in K[(X_{ij})_{1\leq i\leq n}].$$

est irréductible.
[Indication: On pourra procéder par récurrence sur n.]

7 - Soit K un corps.
(i) Montrer que $P = X^2 - Y^3 \in K[X,Y]$ est irréductible.
(ii) Soit $\Phi : K[X,Y] \to K[T]$ le morphisme défini par $\Phi(X) = T^3$ et $\Phi(Y) = T^2$ Montrer que $\ker\Phi = (P)$.

8 - (Polynômes invariants par le groupe alterné) Soient K un corps de caractéristique $\neq 2$ et $n \geq 1$ un entier.
(i) Soient $1 \leq i < j \leq n$. Soit $P \in K[X_1, \ldots, X_n]$ tel que

$$P(X_1, \ldots, X_i, \ldots, X_j, \ldots X_n) = -P(X_1, \ldots, X_j, \ldots, X_i, \ldots X_n).$$

Montrer que P est divisible par $X_i - X_j$.
(ii) Soit $R \in K[X_1, \ldots, X_n]$ tel que $R^\sigma = -R$ pour toute permutation impaire $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ Montrer que P est divisible par $V = \prod_{1\leq i<j\leq n} X_i - X_j$.

Soit $P \in K[X_1, \ldots, X_n]$ tel que $P^\sigma = P$ pour toute permutation $\sigma \in \mathfrak{A}_n$.
(iii) Montrer que $P^\tau = P^{\tau'}$ pour tous $\tau, \tau' \in \mathfrak{S}_n \setminus \mathfrak{A}_n$.
(iv) Soit $\tau_0 = (12)$ et $R = P - P^{\tau_0}$. Montrer que $R^\sigma = -R$ pour toute permutation impaire $\sigma \in \mathfrak{S}_n$.
(v) En déduire que $P = Q + RV$, où Q et R sont des polynômes symétriques et V comme en (ii).

9 (*) - **(Théorème de Fermat pour les polynômes)** Montrer que l'équation $X^3 + Y^3 = Z^3$ n'admet pas solution avec des polynômes X, Y, Z dans $\mathbf{C}[T]$ non-constants et premiers entre eux. Généraliser á l'équation $X^n + Y^n = Z^n$ pour $n \geq 3$.