

---

## Autour du semi-groupe d'Ornstein-Uhlenbeck

---

Quelques leçons en interaction avec ce qui suit :

- Espaces de fonctions. Exemples et applications.
- Espaces de Hilbert. Bases hilbertiennes. Exemples et applications.
- Espaces  $L^p$  pour  $1 \leq p \leq +\infty$ .
- Fonctions définies par une intégrale dépendant d'un paramètre. Exemples et applications. (I)
- Transformation de Fourier, produit de convolution. Applications. (I)
- Utilisation en probabilités de la transformation de Fourier ou de Laplace et du produit de convolution.

**Chaque exercice** répond à une ou des questions en rapport avec les thématiques du programme de l'agreg. Il peut faire l'objet d'un développement ou être une des fameuses applications souvent demandées dans les leçons.

### 1 Utilisation de la transformée de Fourier pour résoudre une EDP

Dans tout ce paragraphe, on adopte les notations utilisées par [Rud95]<sup>1</sup>.

**Définition 1.** Soit  $f \in L^1(\lambda)$ . La fonction  $\hat{f}$  définie par

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad \hat{f}(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int f(x) e^{-itx} dx,$$

est appelée transformée de Fourier de  $f$ .

On souhaite résoudre l'équation aux dérivées partielles suivante :

$$\begin{cases} \partial_t u(t, x) = \frac{1}{2} \partial_{xx}^2 u(t, x) & \text{pour } x \in \mathbb{R} \text{ et } t > 0, \\ u(0, x) = u_0(x) & \text{pour } x \in \mathbb{R}, \end{cases} \quad (1)$$

où  $u_0$  est une fonction donnée de  $L^1$ . Plus précisément, on cherche une fonction  $u$  de classe  $\mathcal{C}^{1,2}([0, +\infty[ \times \mathbb{R}, \mathbb{R})$  (c'est-à-dire de classe  $\mathcal{C}^1$  par rapport à la première variable et  $\mathcal{C}^2$  par rapport à la seconde) qui vérifie (1) au sens où  $u(t, \cdot)$  converge vers  $u_0$  presque partout lorsque  $t$  tend vers 0.

**Exercice 2** ([Laa01]). On va chercher à résoudre l'équation en supposant que "tout est permis" puis on contrôlera *a posteriori* que tous les calculs sont licites.

---

<sup>1</sup>Quelque soit la définition que vous choisissiez, méfiez-vous de la conserver tout le long de votre exposé.

1. Supposons qu'il existe une fonction  $u$  solution de (1) telle que, pour tout  $t > 0$  fixé,

$$\int_{\mathbb{R}} |u(t, x)| dx < +\infty, \quad \int_{\mathbb{R}} \left| \frac{\partial u}{\partial t}(t, x) \right| dx < +\infty, \quad \int_{\mathbb{R}} \left| \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t, x) \right| dx < +\infty.$$

On suppose de plus que pour tout  $t > 0$ , on a

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{\partial u}{\partial t}(t, x) e^{-itx} dx = \frac{\partial}{\partial t} \int_{\mathbb{R}} u(t, x) e^{-itx} dx.$$

Considérons sa transformée de Fourier (en  $x$ ) :

$$\hat{u}(t, y) = \int_{\mathbb{R}} u(t, x) e^{-ixy} \frac{dx}{\sqrt{2\pi}}.$$

(a) Montrer que  $\widehat{\partial_x u}(y) = iy\hat{u}(y)$  et  $\widehat{\partial_{xx}^2 u}(y) = -y^2\hat{u}(y)$ .

(b) Montrer que, pour tout  $y \in \mathbb{R}$ , la fonction  $t \mapsto \hat{u}(t, y)$  est solution de

$$\partial_t \hat{u}(t, y) = -\frac{1}{2} y^2 \hat{u}(t, y).$$

(c) En déduire que

$$\forall t > 0, \forall y \in \mathbb{R}, \quad \hat{u}(t, y) = \hat{u}_0(y) e^{-y^2 t/2}.$$

(d) Calculer la transformée de Fourier de la fonction  $p_t(x) = e^{-x^2/(2t)}/\sqrt{t}$ . On peut se souvenir que si  $Y$  suit la loi  $\mathcal{N}(0, 1)$ , alors  $\mathbb{E}(e^{itY}) = e^{-t^2/2}$ .

(e) En déduire que

$$\forall t > 0, x \in \mathbb{R}, \quad u(t, x) = u_0 * p_t(x) / \sqrt{2\pi} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} u_0(z) p_t(z-x) dx = \mathbb{E}(u_0(x + \sqrt{t}Y)),$$

où  $Y$  suit la loi  $\mathcal{N}(0, 1)$ .

2. Vérifier que la solution trouvée  $u$  satisfait toutes les hypothèses de la première question.

3. Supposons que  $u$  soit solution de l'équation de la chaleur. Montrer alors que la fonction  $v$  définie par

$$v(t, x) = u(1 - e^{-2t}, xe^{-t})$$

est solution de l'équation

$$\partial_t v(t, x) = Av(t, x),$$

avec la même donnée initiale.

## 2 La transformée de Laplace

Soit  $\mu$  une mesure de probabilité sur  $\mathbb{R}$  muni de sa tribu borélienne. On lui associe la fonction  $L$  définie pour  $t \in \mathbb{R}$  par :

$$L(t) = \int_{\mathbb{R}^d} e^{tx} \mu(dx).$$

**Exercice 3.** Déterminer  $L$  lorsque  $\mu$  est

1. la mesure gaussienne  $\mathcal{N}(0, 1)$  de densité

$$x \mapsto \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{|x|^2}{2}\right),$$

2. la mesure gaussienne  $\mathcal{N}(m, \sigma^2)$  de densité

$$x \mapsto \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left(-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}\right),$$

3. la mesure exponentielle de densité

$$x \mapsto \lambda e^{-\lambda x} \mathbf{1}_{\{x>0\}},$$

4. la mesure de Cauchy de densité

$$x \mapsto \frac{1}{\pi} \frac{1}{1+x^2},$$

5. la mesure de Poisson

$$\mu = \sum_{k=0}^{\infty} e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!} \delta_k,$$

6. la mesure binomiale

$$\mu = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \delta_k.$$

**Exercice 4** (Quelques propriétés de la transformée de Laplace). Voici quelques propriétés classiques de  $L$ .

1. Montrer que  $L$  est convexe. Que dire de son domaine de définition ?
2. Quel lien existe-t-il entre la régularité de  $L$  en 0 et les propriétés de  $\mu$  ?
3. Montrer que  $L$  est log-convexe (*i.e.*  $\log L$  est une fonction convexe).
4. Que dire de la transformée de Laplace de  $\mu * \nu$  ?

**Exercice 5** (Inégalité de Chernov). Soit  $(X_n)_{n \geq 1}$  une suite de variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées de loi  $\mu$  et de transformée de Laplace  $L$  définie sur intervalle d'intérieur non vide. On les supposera de moyenne nulle.

1. Montrer que, pour tout  $r \geq 0$ ,

$$\mathbb{P}\left(\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n X_k \geq r\right) \leq \exp\left(-n \sup_{\lambda>0} (r\lambda - L(\lambda))\right).$$

2. Que donne cette majoration pour la mesure gaussienne ? la mesure exponentielle ? la loi de Poisson ?

### 3 Un exemple classique de semi-groupe

Tout ce qui concerne le processus d'Ornstein-Uhlenbeck se trouve dans les dix premières pages de [Bak94]. Soit  $\mathcal{A}$  l'ensemble des fonctions de classe  $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$  à dérivées à croissance lente. Une fonction  $f$  est dite à croissance lente s'il existe un polynôme  $P$  tel que  $|f| \leq P$ . Dans toute la section, les fonctions considérées seront supposées appartenir à l'ensemble  $\mathcal{A}$ .

**Définition 6.** Le semi-groupe d'Ornstein-Uhlenbeck sur  $\mathbb{R}$  est la famille  $(N_t)_{t \geq 0}$  d'opérateurs agissant sur les fonctions  $f$  de  $\mathcal{A}$  par :

$$N_t(f)(x) \stackrel{\text{déf.}}{=} \int_{\mathbb{R}} f\left(e^{-t}x + \sqrt{1 - e^{-2t}}y\right) \gamma(dy) = \int_{\mathbb{R}} f\left(e^{-t}x + \sqrt{1 - e^{-2t}}y\right) e^{-y^2/2} \frac{dy}{\sqrt{2\pi}},$$

où  $\gamma$  désigne la mesure gaussienne standard sur  $\mathbb{R}$ . On pourra poser

$$c_t \stackrel{\text{déf.}}{=} e^{-t} \quad \text{et} \quad d_t \stackrel{\text{déf.}}{=} \sqrt{1 - e^{-2t}}.$$

**Exercice 7** (Propriété de semi-groupe et générateur infinitésimal). Montrer que la famille  $(N_t)_{t \geq 0}$  vérifie les propriétés suivantes :

1. pour tout  $t \geq 0$  et toute fonction  $f \in \mathcal{A}$ ,  $N_t(f) \in \mathcal{A}$ ,
2. pour tout  $t \geq 0$ ,  $N_t \mathbf{1}(x) = 1$ ,
3. pour tous  $t \geq 0$  et  $f \in \mathcal{A}$ ,  $f \geq 0$  entraîne  $N_t f \geq 0$ ,
4. pour toute fonction  $f \in \mathcal{A}$ ,  $N_0 f = f$ ,
5. pour tous  $s, t \geq 0$  et  $f \in \mathcal{A}$ ,  $N_t N_s f(x) = N_{t+s} f(x)$ .
6. Montrer que

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} (N_t f - f)(x) = f''(x) - x f'(x).$$

L'opérateur  $A$  défini sur  $\mathcal{A}$  par  $Af(x) = f''(x) - x f'(x)$  sera appelé générateur infinitésimal du semi-groupe d'Ornstein-Uhlenbeck.

7. Montrer que

$$\partial_t N_t f = A(N_t f) = N_t(Af).$$

*Remarque 8.* Cette propriété est très important car elle montre en particulier que, pour  $f_0$  dans  $\mathcal{A}$ , la fonction  $f$  définie sur  $[0, +\infty[ \times \mathbb{R}$  par  $f(t, x) \stackrel{\text{déf.}}{=} N_t f_0(x)$  est solution de l'équation aux dérivées partielles suivante :

$$\begin{cases} \partial_t f(t, x) = Af(t, x) = \partial_{xx}^2 f(t, x) - x \partial_x f(t, x) & \text{pour } (t, x) \in ]0, +\infty[ \times \mathbb{R}, \\ f(0, x) = f_0(x). \end{cases}$$

### 4 Mesure invariante et symétrique

**Exercice 9** (Invariance, symétrie et contraction). On se propose de montrer ici que  $N_t$  est auto-adjoint dans  $L^2(\gamma)$ , continu de  $L^p(\gamma)$  dans lui-même et peut-être un peu plus...

1. Montrer que la mesure gaussienne centrée réduite  $\gamma$  est invariante pour le semi-groupe d'Ornstein-Uhlenbeck, c'est-à-dire que pour toute fonction  $f \in \mathcal{A}$ ,

$$\int Af(x) \gamma(dx) = 0,$$

ou, de manière équivalente, pour tout  $t \geq 0$ ,

$$\int N_t f(x) \gamma(dx) = \int f(x) \gamma(dx).$$

2. Montrer de plus que le semi-groupe d'Ornstein-Uhlenbeck est symétrique pour la mesure  $\gamma$  c'est-à-dire que pour toutes fonctions  $f, g \in \mathcal{A}$ ,

$$\int N_t f(x) g(x) \gamma(dx) = \int f(x) N_t g(x) \gamma(dx),$$

ou, de manière équivalente,

$$\int Af(x)g(x) \gamma(dx) = \int f(x)Ag(x) \gamma(dx) = - \int f'(x)g'(x) \gamma(dx). \quad (2)$$

On pourra montrer que l'expression  $\int N_t f(x)g(x) \gamma(dx)$  est symétrique en  $f$  et  $g$ .

3. Montrer que la propriété de symétrie est plus forte que celle d'invariance.  
 4. Montrer que pour tout  $t \geq 0$  et tout  $p \in [1, +\infty]$ ,  $N_t$  est une contraction de  $L^p(\gamma)$  dans lui-même, c'est-à-dire que

$$\forall f \in L^p(\gamma), \quad \|N_t f\|_p \leq \|f\|_p.$$

En déduire la norme de  $N_t$  vu comme endomorphisme de  $L^p(\gamma)$ .

5. Notons  $f_\lambda : x \mapsto e^{\lambda x}$ . Calculer  $\|f_\lambda\|_p$  et montrer que

$$P_t(f_\lambda) = \exp(\lambda^2(1 - e^{-2t})/2) f_{\lambda e^{-t}}.$$

En déduire que  $P_t$  n'est pas continu de  $L^p$  dans  $L^q$  pour  $q > 1 + e^{2t}(p - 1)$ .

*Remarque 10.* La propriété de contraction dans  $L^p(\gamma)$  n'est pas propre au processus d'Ornstein-Uhlenbeck. Seul importe ici que le noyau soit une probabilité. On peut par contre montrer le résultat bien plus fort suivant : soit  $1 < p < q < \infty$ ,  $N_t$  est une contraction de  $L^p(\gamma)$  dans  $L^q(\gamma)$  si et seulement si

$$q \leq 1 + e^{2t}(p - 1).$$

## 5 Polynômes de Hermite

**Définition 11.** Les polynômes de Hermite, que nous noterons  $(H_n)_n$ , peuvent être définis à partir de leur série génératrice :

$$G(s, x) = \exp(sx - s^2/2) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{s^n}{n!} H_n(x),$$

c'est-à-dire que  $H_n(x) = \partial_s^n G(s, x)|_{s=0}$ .

**Exercice 12** (Orthogonalité et décomposition du semi-groupe d'Ornstein-Uhlenbeck). Le but de cet exercice est de montrer que les polynômes de Hermite forment une base hilbertienne de  $L^2(\gamma)$  mais également une base orthonormée de vecteurs propres pour  $N_t$ .

1. Soit  $f \in L^2(\gamma)$ . On définit la transformée de Laplace de la mesure  $\nu = f\gamma$  par

$$L_f(\lambda) = \int f(x)e^{\lambda x} \gamma(dx).$$

Montrer que  $L_f$  est finie sur  $\mathbb{R}$ .

2. Supposons que  $f$  est orthogonale à tous les polynômes. En considérant son développement en série entière au voisinage de 0, montrer que  $L_f$  est nulle. Qu'en est-il de  $f$  ?
3. En déduire que les polynômes forment un sous-espace dense de  $L^2(\gamma)$ .
4. Montrer que la transformée de Laplace de  $\gamma$  vaut  $e^{\lambda^2/2}$ .
5. Soient  $s, t \in \mathbb{R}$  fixés. Appliquer  $N_t$  à la fonction  $x \mapsto G(s, x)$ . En déduire

$$N_t(G(s, \cdot))(x) = G(se^{-t}, x).$$

6. Montrer que pour tout  $t > 0$  et tout  $n \in \mathbb{N}$ ,

$$N_t(H_n)(x) = e^{-nt} H_n(x).$$

On dit que le polynôme de Hermite  $H_n$  est vecteur propre de  $N_t$ , de valeur propre  $e^{-nt}$ .

7. En déduire (en utilisant également la symétrie de  $N_t$  par rapport à  $\gamma$ ) que, pour tous entiers  $m$  et  $n$  et tout  $t > 0$ ,

$$e^{-mt} \int H_m H_n d\gamma = e^{-nt} \int H_m H_n d\gamma.$$

En déduire que les polynômes de Hermite sont orthogonaux dans  $L^2(\gamma)$ .

8. Calculer  $\int G(s, x)^2 \gamma(dx)$  de deux façons différentes. En déduire que les polynômes  $(H_n/\sqrt{n!})_{n \in \mathbb{N}}$  forment une base hilbertienne de  $L^2(\gamma)$ .
9. Quelles sont les valeurs propres de  $N_t$  ? Quelles sont les multiplicités de ces valeurs propres et leurs sous-espaces propres ?
10. Même question pour  $A$ .

## Références

- [Bak94] D. BAKRY – « L'hypercontractivité et son utilisation en théorie des semigroupes », Lectures on probability theory (Saint-Flour, 1992), Lecture Notes in Math., vol. 1581, Springer, Berlin, 1994, p. 1–114.
- [Laa01] E. LAAMRI – *Mesures, intégration, convolution, et transformée de Fourier des fonctions*, Dunod, 2001.
- [Rud95] W. RUDIN – *Analyse réelle et complexe*, Masson, 1995.