

TD - Algèbre linéaire

Michel Coste

1. Soit E un espace vectoriel de dimension finie sur \mathbb{C} .
Montrer que si $u \in \text{End}(E)$ est un projecteur, alors $\text{rang}(u) = \text{trace}(u)$.
Soient u_1, \dots, u_k des endomorphismes de E tels que $u_1 + \dots + u_k = \mathbf{1}_E$.
Montrer l'équivalence des propriétés suivantes :
 - (a) $u_i u_j = 0$ pour tous $i \neq j$.
 - (b) $u_i^2 = u_i$ pour $i = 1, \dots, k$.
 - (c) $\text{rang}(u_1) + \dots + \text{rang}(u_k) = n$.
2. Soit f une forme linéaire sur $M_n(\mathbb{K})$ telle que $f(AB) = f(BA)$ pour toutes matrices $A, B \in M_n(\mathbb{K})$. Montrer qu'il existe $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que $f = \lambda \text{trace}$.
3. Montrer que l'hyperplan vectoriel d'équation $\ell_1 x_1 + \dots + \ell_n x_n = 0$ est stable par la matrice $M \in M_n(\mathbb{K})$ si et seulement si (ℓ_1, \dots, ℓ_n) est un vecteur propre pour la matrice transposée ${}^t M$.
Décrire tous les sous-espaces stables par la matrice $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.
4. Soit E un espace vectoriel de dimension finie sur \mathbb{K} . Caractériser les endomorphismes u de E tels que tout sous-espace vectoriel de E admette un supplémentaire stable.
5. On suppose que les matrices $A, B \in M_n(\mathbb{K})$ commutent. Donner une condition nécessaire et suffisante pour que la matrice $M = \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & A \end{pmatrix}$ soit diagonalisable. (Indication : on pourra calculer $P(M)$ où P est un polynôme.)
6. Soient $A, B \in M_n(\mathbb{C})$. Montrer l'équivalence des propriétés suivantes :
 - (a) Il existe $P \in M_n(\mathbb{C})$ non nulle telle que $AP = PB$.
 - (b) A et B ont une valeur propre commune.Pour (a) \Rightarrow (b), raisonner par l'absurde en considérant les polynômes annulateurs minimaux. Pour (b) \Rightarrow (a), se ramener au cas d'une valeur propre commune nulle.
7. Montrer que l'application $(A, B) \mapsto \text{trace}(AB)$ est une forme bilinéaire symétrique non dégénérée sur $M_n(\mathbb{K}) \times M_n(\mathbb{K})$. Calculer sa signature si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$. (Indication : considérer la restriction de la forme quadratique au sous-espace des matrices symétriques).

8. Soient A et $B \in M_n(\mathbb{R})$, B symétrique. Montrer que le degré du polynôme $P(X) = \det(A + XB)$ est inférieur ou égal au rang de B .
9. Soient A et $B \in M_n(\mathbb{R})$, symétriques toutes les deux, A définie positive.
- Montrer qu'il existe une matrice symétrique inversible S telle que $S^2 = A$.
 - Montrer que AB est diagonalisable et que son nombre de valeurs propres (comptées avec multiplicité) positives (resp. négatives, resp. nulles) est égal au nombre de valeurs propres positives (resp. négatives, resp. nulles) de B .
10. On note $\mathbb{R}_d[X]$ avec $X = (X_1, \dots, X_n)$ l'espace vectoriel des polynômes en n indéterminées de degré total inférieur ou égal à d .
- Calculer la dimension $D_{n,d}$ de $\mathbb{R}_d[X]$ sur \mathbb{R} .
 - Montrer que l'on peut trouver $D = D_{n,d}$ points a_1, \dots, a_D tels que pour tout $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{N}^n$ avec $\alpha_1 + \dots + \alpha_n \leq d$, il existe des réels $c_{\alpha,i}$, $i = 1, \dots, D$ tels que, pour tout $P \in \mathbb{R}_d[X]$, le coefficient de $X_1^{\alpha_1} \dots X_n^{\alpha_n}$ dans $P(X)$ soit égal à $\sum_{i=1}^D c_{\alpha,i} P(a_i)$.
 - Soit $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction telle que pour tous $a, h \in \mathbb{R}^n$, la fonction $\mathbb{R} \ni t \mapsto f(a + th) \in \mathbb{R}$ soit polynomiale de degré $\leq d$. Montrer que f est une fonction polynomiale en n variables de degré total $\leq d$. (On pourra raisonner par récurrence sur n).