TD agreg

Lionel Fourquaux

22 novembre 2010

1 Coniques et équations diophantiennes

On considère une conique $\mathcal{C}$ du plan affine, identifié à $\mathbb{R}^2$ après choix d'un système de coordonnées.

1. Montrer que les coordonnées des points d'intersection de $\mathcal{C}$ avec une droite sont données par des équations de degré au plus 2. En déduire qu'il y a au plus deux points d'intersection.
2. On considère une droite dont un point d'intersection avec $\mathcal{C}$ est connu. Montrer que les coordonnées de l'autre point d'intersection (s'il existe) sont données par des équations de degré 1.
3. Si $\mathcal{C}$ est donnée par une équation définie sur $\mathbb{Q}$ et si l'on connaît sur $\mathcal{C}$ un point à coordonnées rationnelles, montrer que l'on peut paramétrer les points de $\mathcal{C}$ à coordonnées rationnelles par une famille de droites de pentes rationnelles.

   En déduire les solutions entières de l'équation $a^2 + b^2 = c^2$.

2 Coniques et équations de degré 4

On considère un polynôme unitaire de degré 4, $P(X) = X^4 + a_3X^3 + a_2X^2 + a_1X + a_0 \in \mathbb{C}[X]$.

1. Montrer que l'on peut voir les racines de P comme les abscisses des points d'intersection de deux coniques, dont l'une est une parabole.
2. On considère le faisceau de coniques engendré par ces deux coniques. Montrer que rechercher les coniques dégénérées dans ce faisceau revient à chercher les racines d'un polynôme de degré 3.
3. En considérant une de ces coniques dégénérées, montrer que l'on peut ramener la recherche des racines de P à celle des racines d'un polynôme de degré 3 puis de polynômes de degré 2. En déduire que les racines de P peuvent s'exprimer à l'aide de radicaux. (On suppose connue la formule de Cardan-Tartaglia).

3 Trisection de l'angle

Rappeler pourquoi la trisection de l'angle ne peut pas être réalisée en général à la règle et au compas. Donner un exemple où la trisection à la règle et au compas est possible.

Montrer que la trisection de l'angle peut être réalisée avec une règle graduée (i.e. une règle portant deux points à distance fixée) et un compas.

4 Aire d'un quadrilatère

Montrer que l'aire d'un quadrilatère non croisé, inscrit dans un cercle, de côtés a, b, c, d, et de demi-périmètre $s = \frac{a+b+c+d}{2}$, est égale à $\sqrt{(s-a)(s-b)(s-c)(s-d)}$.

5 Sous-groupes de petit indice

Soit G un groupe fini, et soit p le plus petit diviseur non trivial de l'ordre de G. Montrer que tout sous-groupe de G d'indice p est distingué.

6 Sous-groupes d'ordre 6 de $\mathcal{A}_4$

Montrer simplement que $\mathcal{A}_4$ n'a pas de sous-groupe d'ordre 6.

7 Lemme de Cauchy

Rappelons l'énoncé du lemme de Cauchy : si G est un groupe fini d'ordre multiple d'un nombre premier p, alors G contient un élément d'ordre p.

1. Montrer le lemme de Cauchy dans le cas où G est cyclique.
2. Montrer le lemme dans le cas où G est un produit de groupes cycliques. Montrer si G est abélien alors le lemme de Cauchy se déduit du théorème de structure des groupes abéliens ?
3. Montrer que le lemme de Cauchy se déduit aussi de l'existence des sous-groupes de Sylow (sans supposer que G est abélien).
4. Sans utiliser les résultats de classification des groupes abéliens, montrer le lemme dans ce cas. (On pourra procéder par récurrence sur l'ordre du groupe).
5. Déduire le lemme de Cauchy dans le cas général à partir du cas abélien. (On pourra considérer l'action de G sur lui-même par conjugaison).
6. Démontrer directement le lemme de Cauchy dans le cas général. (On pourra considérer l'action par permutation circulaire de $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ sur l'ensemble des p-uples d'éléments de G dont le produit est l'élément neutre).

8 Groupes d'ordre 12

Quelles sont les classes d'isomorphisme de groupes non abéliens d'ordre 12 ? Qu'en est-il des groupes abéliens ?