TD - Formes quadratiques

Michel Coste

1. On considère les formes quadratiques Q_i sur $\mathrm{M}_n(\mathbb{K})$ (où $\mathbb{K}$ est un corps de caractéristique $\neq 2$ définies par $Q_1(A) = \mathrm{trace}(A^2)$, $Q_2(A) = \mathrm{trace}(A\,{}^tA$ et $Q_3(A) = (\mathrm{trace}\,A)^2$. Quel est le rang des Q_i ? Calculer leurs signature si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$. (Indication pour Q_1 : considérer la restriction de la forme quadratique au sous-espace des matrices symétriques).

2. Soit $A = (a_{i,j})$ une matrice symétrique réelle de taille n. Pour $i = 1, \dots, n$, on note D_i le déterminant $\begin{vmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,i} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{i,1} & \cdots & a_{i,i} \end{vmatrix}$. Montrer que les propriétés suivantes sont équivalentes :
   (a) Il existe une matrice triangulaire supérieure unipotente T (avec uniquement des 1 sur la diagonale) et une matrice diagonale inversible D telles que $D = {}^tT\,A\,T$.
   (b) $D_1 D_2 \cdots D_n \neq 0$.

   Montrer qu'alors la signature de A est $(n - q, q)$ où q est le nombre de changements de signe dans la suite $(1, D_1, D_1, \dots, D_n)$.

3. Soient A et $B \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$, symétriques toutes les deux, A définie positive.
   (a) Montrer qu'il existe une matrice symétrique inversible S telle que $S^2 = A$.
   (b) Montrer que AB est diagonalisable et que son nombre de valeurs propres (comptées avec multiplicité) positives (resp. négatives, resp. nulles) est égal au nombre de valeurs propres positives (resp. négatives, resp. nulles) de B.

4. Soit Q la forme quadratique sur $\mathbb{R}^4$ définie par $Q(x, y, z, t) = xy - zt$. Soit H un hyperplan de $\mathbb{R}^4$.
   (a) Quelle est la signature de Q ?
   (b) Quelles sont les valeurs possibles pour le rang de la restriction $Q|_H$? (On pourra chercher à identifier le noyau de $Q|_H$ à partir de l'orthogonal de H pour Q).
   (c) Quelles sont les valeurs possibles pour la signature de la restriction $Q|_H$?

5. Soit $\mathbb{K}$ un corps de caractéristique $\neq 2$ et soit Q une forme quadratique sur un espace vectoriel H de dimension 2 sur $\mathbb{K}$. Montrer l'équivalence des propriétés suivantes :
   (a) Q est non dégénérée et admet un vecteur non nul isotrope.
   (b) Il existe une base de H dans laquelle la matrice de Q est $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.
   (c) Q a exactement deux droites vectorielles isotropes.

   Si Q vérifie les propriétés précedentes, montrer que son groupe spécial orthogonal est isomorphe au groupe multiplicatif de $\mathbb{K}$.

6. On considère la conique réelle $\mathcal{C}_\lambda$ qui a pour équation dans un repère orthonormé du plan euclidien $3x^2 - 4xy + \lambda y^2 - 2x = 1$, où λ est un paramètre réel.
   (a) Déterminer la nature de la conique $\mathcal{C}_\lambda$ en fonction de λ.
   (b) Décrire complètement $\mathcal{C}_2$.