Université de Rennes 1
Année 2012/2013

Préparation à l'agrégation

Préparation à l'écrit-Feuille d'exercices 2

1 - (Spectre d'un élément relativement à une sous-algèbre) Soit $\mathcal{A} = C(S^1)$ l'algèbre de Banach des fonctions continues f sur le cercle unité $S^1 = \{z \in \mathbf{C} \mid |z| = 1\}$ à valeurs complexes, munie de la norme $\|f\|_\infty.$ On considère la sous-algèbre unitaire $\mathcal{B}$ de $\mathcal{A}$ formée des fonctions $f \in C(S^1)$ pour lesquelles il existe $F \in C(\overline{D})$ telle que $F|_{S^1} = f$ et telle que $F|_D$ est holomorphe, où $D = \{z \in \mathbf{C} \mid |z| < 1\}$ est le disque unité.
(i) Montrer que $\mathcal{B}$ est fermée dans $\mathcal{A}$ et qu'elle est donc une algèbre de Banach unitaire.

Soit f_0 la fonction dans $\mathcal{B}$ définie par $f_0(z) = z$. On note $\sigma_{\mathcal{A}}(f_0)$ et $\sigma_{\mathcal{B}}(f_0)$ le spectre de f_0 relativement à $\mathcal{A}$ et à $\mathcal{B},$ respectivement.
(ii) Déterminer $\sigma_{\mathcal{A}}(f_0)$.
(iii) Déterminer $\sigma_{\mathcal{B}}(f_0)$.
(iv) Vérifier qu'on a bien $r_{\mathcal{A}}(f_0) = r_{\mathcal{B}}(f_0),$ où $r_{\mathcal{A}}(f_0)$ et $r_{\mathcal{B}}(f_0)$ est le rayon spectral de f_0 relativement à $\mathcal{A}$ et à $\mathcal{B},$ respectivement.

2 - (Unitarisation d'une algèbre de Banach) Soit $\mathcal{A}$ une algèbre sur $\mathbf{C}$. On considère l'espace vectoriel somme

$$\widetilde{\mathcal{A}} = \mathcal{A} \oplus \mathbf{C},$$

muni des opérations usuelles. On munit $\widetilde{\mathcal{A}}$ de la mutiplication

$$(a, \lambda)(b, \mu) = (ab + \lambda b + \mu a, \lambda\mu) \qquad \text{pour tout} \quad (a, b) \in \mathcal{A}^2, (\lambda, \mu) \in \mathbf{C}^2.$$

(i) Montrer que $\widetilde{\mathcal{A}}$ est une algèbre unitaire d'élément unité $e = (0, 1).$
(ii) Montrer que $i : \mathcal{A} \to \widetilde{\mathcal{A}}$ est un homorphisme injectif d'algèbres et que $i(\mathcal{A})$ est un idéal bilatère de $\widetilde{\mathcal{A}}.$

On identifiera dans la suite $\mathcal{A}$ avec $i(\mathcal{A})$, qui est un l'idéal bilatère de codimension 1 de $\widetilde{\mathcal{A}}$, et on notera $a + \lambda e$ un élément générique de $\widetilde{\mathcal{A}}$, avec $a \in \mathcal{A}$ et $\lambda \in \mathbf{C}.$

On suppose maintenant que $\mathcal{A}$ est une algèbre de Banach. On munit $\widetilde{\mathcal{A}}$ de la norme

$$\|a + \lambda e\| = \|a\| + |\lambda| \qquad \text{pour tous} \quad a \in \mathcal{A}, \lambda \in \mathbf{C}.$$

(iii) Montrer que $\widetilde{\mathcal{A}}$ est une algèbre de Banach.

3 -(Algèbre de Banach quotient) Soit $\mathcal{A}$ une algèbre de Banach et I un idéal bilatère *fermé* de $\mathcal{A}.$ Soit $\mathcal{A}/I$ l'algèbre quotient. On note $\pi : \mathcal{A} \to \mathcal{A}/I$ l'application quotient. On munit $\mathcal{A}/I$ de la norme quotient

$$\|\pi(a)\| = \inf\{\|a + x\| \mid x \in I\} \qquad \text{pour tout} \quad a \in \mathcal{A}.$$

Montrer que $\mathcal{A}/I$ est une algèbre de Banach.

3 -(Caractères de $C(K)$) Soit K un espace compact et soit $\mathcal{A} = C(K)$ l'algèbre de Banach des fonctions continues f sur K à valeurs complexes, munie de la norme $\|f\|_\infty.$

Chaque point $x \in K$ définit un caractère φ_x de $\mathcal{A}$ par $\varphi_x(f) = f(x)$ pour tout $f \in C(K).$ On se propose de montrer que tout caractère de $\mathcal{A}$ est de cette forme.

Soit donc $\varphi : \mathcal{A} \to \mathbf{C}$ un caractère de $\mathcal{A}$. Supposons, par l'absurde, que $\varphi \notin \{\varphi_x \mid x \in K\}.$
(i) Montrer que, pour tout $x \in K$, il existe $f_x \in C(K)$ telle que $\varphi(f_x) = 0$ et $f_x(x) \neq 0.$
(ii) Montrer qu'il existe un nombre fini de points $x_1, \ldots, x_n$ de K avec la propriété: pour tout $y \in K$, il existe $i \in \{1, \ldots, n\}$ tel que $f_{x_i}(y) \neq 0.$

On pose $g := |f_{x_1}|^2 + \cdots + |f_{x_n}|^2.$
(iii) Montrer que $\varphi(g) = 0$ et que g est inversible dans $\mathcal{A}.$
(iv) Conclure.