Algèbre linéaire

Espaces vectoriels, endomorphismes

Exercice 1.

1. Montrer qu'une famille $(g_1 \ \ldots \ g_n)$ de fonctions de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$ est libre si et seulement s'il existe des réels $r_1 \ \ldots \ r_n$ tels que $\det\big((g_i(r_j))_{i,j}\big) \neq 0$.
2. Soit f une fonction de $\mathbf{R}^2$ dans $\mathbf{R}$. Pour $a \in \mathbf{R}$, on note φ_a la fonction de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$ définie par $\varphi_a(x) = f(a \ x)$ et ψ_a celle définie par $\psi_a(x) = f(x \ a)$. Soit $E = \mathrm{Vect}(\{\varphi_a \mid a \in \mathbf{R}\})$ et $F = \mathrm{Vect}(\{\psi_a \mid a \in \mathbf{R}\})$.
   Montrer que E est de dimension finie si et seulement si F est de dimension finie, et qu'alors $\dim E = \dim F$.

Exercice 2. Soient u et v des endomorphismes d'un espace vectoriel de dimension finie tels que $u \circ v$

Polynômes d'endomorphismes, réduction

Exercice 10. Soit u un endomorphisme d'un K-espace vectoriel E de dimension finie. Soit $P \in K[X]$ son polynôme minimal. On note $P = Q_1^{\alpha_1} \cdots Q_\ell^{\alpha_\ell}$ la décomposition de P en produit de facteurs unitaires irréductibles sur K.

1. Soit $x \in E$. Montrer qu'il existe un unique polynôme unitaire $M_x \in K[X]$ tel que $M_x(u)(x) = 0$ et que M_x divise tout polynôme $A \in K[X]$ tel que $A(u)(x) = 0$.
2. Montrer que, pour $1 \leqslant i \leqslant \ell$, il existe $a_i \in E$ tel que $M_{a_i} = Q_i^{\alpha_i}$.
   (On pourra écrire $P = Q_i^{\alpha_i} R$ et chercher a_i dans l'image de $R(u)$).
3. Soient $x\ \ y \in E$ tels que M_x et M_y sont premiers entre eux. Montrer que $M_{x+y} = M_x M_y$.
4. Montrer qu'il existe $a \in E$ tel que $M_a = P$.
5. En déduire (sans Cayley-Hamilton) que $\deg P \leqslant \dim E$.

Exercice 11. Soit u un endomorphisme de $\mathbf{C}^n$. Montrer que u est diagonalisable si et seulement si, pour tout $a \in \mathbf{C}$, $\mathrm{rg}(u - a\mathrm{Id}) = \mathrm{rg}((u - a\mathrm{Id})^2)$.

Exercice 12. Soit E un espace vectoriel de dimension finie sur K. Caractériser les endomorphismes u de E tels que tout sous-espace vectoriel de E admette un supplémentaire stable par u.

Exercice 13. On suppose que les matrices $A\ \ B \in \mathrm{M}_n(K)$ commutent. Donner une condition nécessaire et suffisante pour que la matrice $M = \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & A \end{pmatrix}$ soit diagonalisable.
(On pourra calculer $P(M)$ où P est un polynôme.)

Exercice 14. Soient $A\ \ B \in \mathrm{M}_n(\mathbf{C})$. Montrer l'équivalence des propriétés suivantes :

(a) Il existe $P \in \mathrm{M}_n(\mathbf{C})$ non nulle telle que $AP = PB$.

(b) A et B ont une valeur propre commune.

(our (a) $\Rightarrow$ (b), raisonner par l'absurde en considérant les polynômes annulateurs minimaux. our (b) $\Rightarrow$ (a), se ramener au cas d'une valeur propre commune nulle.)

Dualité

Exercice 15. Soient $(\ell_1\ \ldots\ \ell_n) \in K^n$ et $M \in \mathrm{M}_n(K)$. Montrer que l'hyperplan vectoriel d'équation $\ell_1 x_1 + \cdots + \ell_n x_n = 0$ est stable par la matrice M si et seulement si $(\ell_1\ \ldots\ \ell_n)$ est un vecteur propre pour la matrice transposée ${}^{\mathrm{t}}M$.

Décrire tous les sous-espaces stables par la matrice $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Exercice 16. Soit E un $\mathbf{R}$-espace vectoriel de dimension n. Soit u un endomorphisme de E tel que $u^2 = -\mathrm{Id}$. Montrer que n est pair et que u n'admet pas d'hyperplan stable.