Polynômes à plusieurs indéterminées

Zéros – Prolongement des identitées

Exercice 1. 1. Donner un polynôme $P \in \mathbf{R}[X_1, X_2]$ qui a une infinité de zéros dans $\mathbf{R}^2$ mais qui n'est pas nul.

2. Soit $P \in \mathbf{K}[X_1, \ldots, X_n]$. On suppose qu'il existe des sous-ensembles infinis $I_1, \ldots, I_n$ de $\mathbf{K}$ tels que, pour tout $x = (x_1, \ldots, x_n)$ dans $I_1 \times \cdots \times I_n$, $P(x) = 0$. Montrer que P est le polynôme nul.
3. $\mathbf{K} = \mathbf{R}$ ou $\mathbf{C}$. Soit $P \in \mathbf{K}[X_1, \ldots, X_n]$. Montrer que s'il existe un ouvert non vide Ω de $\mathbf{K}^n$ tel que $P(x) = 0$ pour tout x de Ω, alors P est le polynôme nul.

Exercice 2. Dans cet exercice $\mathbf{K} = \mathbf{R}$ ou $\mathbf{C}$.

1. Montrer que si $P \in \mathbf{K}[X_1, \ldots, X_n]$ n'est pas le polynôme nul, alors $\{x \in \mathbf{K}^n \mid P(x) \neq 0\}$ est un ouvert dense de $\mathbf{K}^n$.
2. Montrer que $\mathrm{GL}_n(\mathbf{K})$ est un ouvert dense de $\mathrm{M}_n(\mathbf{K})$.
3. Montrer que pour toutes matrices A, B de $\mathrm{M}_n(\mathbf{K})$, le polynôme caractéristique de AB est égal à celui de BA.

Quelques déterminants

Exercice 3. 1. Montrer que $X_1 - X_2$ divise $P(X_1, \ldots, X_n)$ dans $\mathbf{K}[X_1, \ldots, X_n]$ si, et seulement si, $P(X_1, X_1, X_3, \ldots, X_n) = 0$.

2. Étudier la divisibilité de $X^n - Y^n$ et $X^n + Y^n$ par $X - Y$ et $X + Y$ dans $\mathbf{K}[X, Y]$.
3. On pose
$$V_n = \det \begin{pmatrix} 1 & X_1 & X_1^2 & \cdots & X_1^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & X_n & X_n^2 & \cdots & X_n^{n-1} \end{pmatrix} \in \mathbf{Z}[X_1, \ldots, X_n].$$
Montrer que V_n est divisible par $X_j - X_i$ pour tous $i < j$. En déduire qu'il existe une constante c telle que $V_n = c \displaystyle\prod_{1 \leqslant i < j \leqslant n} (X_j - X_i)$. Déterminer c.

Exercice 4. Dans l'anneau de polynômes $\mathbf{K}[(X_{i,j})_{i,j=1,\ldots,n}]$, montrer que $\det\big((X_{i,j})_{i,j}\big)$ est irréductible.

Polynômes symétriques

Les polynômes symétriques élémentaires à n indéterminées sont les polynômes
$$\sigma_k = \sum_{1 \leqslant i_1 < \cdots < i_k \leqslant n} X_{i_1} \cdots X_{i_k}, \text{ pour } 1 \leqslant k \leqslant n$$

On rappelle le résultat central : Soit A un anneau commutatif unitaire, $P \in A[X_1, \ldots, X_n]$ un polynôme symétrique. Alors il existe un unique polynôme $Q \in A[Y_1, \ldots, Y_n]$ tel que $P = Q(\sigma_1, \ldots, \sigma_n)$.

Exercice 5. Déterminer si les polynômes suivants sont symétriques et, si oui, les écrire comme polynômes en les polynômes symétriques élémentaires.
$$X_1^2 X_2 + X_2 X_3 + X_3^2 X_1, \qquad (X_1 + X_2)(X_2 + X_3)(X_3 + X_1), \qquad X_1^3 + \cdots + X_n^3.$$

Le discriminant

Exercice 6. 1. Soit $P_n = \prod_{1 \leqslant i < j \leqslant n} (X_j - X_i)^2$.

Montrer qu'il existe un unique polynôme $\Delta_n \in \mathbf{Z}[Y_1, \ldots, Y_n]$ tel que $P_n = \Delta_n(\sigma_1, \ldots, \sigma_n)$. Calculer Δ_2.

2. Soit A un anneau commutatif unitaire et soit $f = T^n + a_1 T^{n-1} + \cdots + a_n$ un polynôme unitaire de degré n de $A[T]$. On pose

$$\operatorname{disc}(f) = \Delta_n(-a_1, a_2, \ldots, (-1)^n a_n),$$

appelé *discriminant* de f.
Soit $P \in \mathbf{C}[T]$ unitaire. Montrer que P a une racine multiple si, et seulement si, $\operatorname{disc}(P) = 0$.

Exercice 7 (Application)**.** 1. Montrer que l'ensemble des matrices de $\mathrm{M}_n(\mathbf{C})$ dont les valeurs propres sont toutes distinctes est un ouvert dense de $\mathrm{M}_n(\mathbf{C})$.

2. Montrer que les matrices diagonalisables forment un sous-ensemble dense de $\mathrm{M}_n(\mathbf{C})$.
3. En déduire une démonstration du théorème de Cayley-Hamilton pour $\mathrm{M}_n(\mathbf{C})$ en vérifiant d'abord ce théorème pour les matrices diagonalisables.

Polynômes homogènes

Un polynôme $P \in \mathbf{K}[X_1, \ldots, X_n]$ est dit homogène de degré d s'il est combinaison linéaire à coefficients dans $\mathbf{K}$ de monômes $X_1^{\alpha_1} \cdots X_n^{\alpha_n}$ avec $\alpha_1 + \cdots + \alpha_n = d$. Par exemple, σ_k est homogène de degré k.

Exercice 8. Calculer en fonction de n et d la dimension de l'espace vectoriel des polynômes homogènes de degré d en n indéterminées.

Exercice 9. Soit $\in \mathbf{K}[X_1, \ldots, X_n]$.

1. Montrer que P est homogène de degré d si et seulement si $P(TX_1, \ldots, TX_n) = T^d P(X_1, \ldots, X_n)$.
2. Vérifier que $\prod_{1 \leqslant i < j \leqslant n} (X_j - X_i)^2$ est homogène. Quel est son degré ?

Exercice 10. Montrer que si P est homogène de degré d, alors $dP = \sum_{i=1}^{n} X_i \dfrac{\partial P}{\partial X_i}$.

Exercice 11. 1. Soit $P \in \mathbf{K}[X_1, \ldots, X_n]$ un polynôme symétrique homogène de degré d. Montrer que P s'écrit sous la forme $P = \sum_{\nu \in H_d} a_\nu \sigma_1^{\nu_1} \cdots \sigma_n^{\nu_n}$, où

$$H_d = \{\nu = (\nu_1, \ldots, \nu_n) \in \mathbf{N}^n \mid \nu_1 + 2\nu_2 + \cdots + n\nu_n = d\}.$$

2. (a) Soit $f = T^3 + pT + q$. Montrer que $\operatorname{disc}(f) = ap^3 + bq^2$ avec a et b entiers.
   (b) Déterminer a et b en choisissant des f convenables.