Formes bilinéaires et quadratiques

Exercice 1. 1. (a) Montrer que l'application $b_1\colon (A,B) \mapsto \mathrm{Tr}(AB)$ est une forme bilinéaire symétrique sur $\mathrm{M}_n(K) \times \mathrm{M}_n(K)$. Est-elle dégénérée ?

(b) Calculer sa signature si $K = \mathbf{R}$. *(Indication : considérer la restriction de la forme quadratique associée au sous-espace des matrices symétriques).*

2. Mêmes questions avec $b_2\colon (A,B) \mapsto \mathrm{Tr}(A\,{}^{\mathrm{t}}B)$ puis $b_3\colon (A,B) \mapsto \mathrm{Tr}(A)\mathrm{Tr}(B)$.

Exercice 2. Soient A et $B \in \mathrm{M}_n(\mathbf{R})$ symétriques, A définie positive.

1. Montrer qu'il existe une matrice symétrique inversible S telle que $S^2 = A$.
2. Montrer que AB est diagonalisable et que son nombre de valeurs propres (comptées avec multiplicité) positives (resp. négatives, resp. nulles) est égal au nombre de valeurs propres positives (resp. négatives, resp. nulles) de B.

Exercice 3. Décomposer en carrés les formes quadratiques sur $\mathbf{R}^3$ définies par

1. $q_1(x,y,z) = x^2 + 3y^2 - 2z^2 + 2xy - 2yz + 2zx$,
2. $q_2(x,y,z) = xy + yz + zx$.

Exercice 4. Soit K un corps de caractéristique différente de 2. Montrer que toute matrice symétrique de rang r de $\mathrm{M}_n(K)$ est égale à la somme de r matrices symétriques de rang 1.

Exercice 5. Quels sont le rang et la signature des formes quadratiques réelles de matrices $B = (b_{i,j}) \in \mathrm{M}_n(\mathbf{R})$ pour

1. $b_{i,j} = i + j - 1$,
2. $b_{i,j} = \min\{i,j\}$.

Exercice 6. Soit $A = (a_{i,j})$ une matrice symétrique réelle de taille n. Pour $i = 1, \dots, n$, on note

$$\Delta_i = \begin{vmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,i} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{i,1} & \cdots & a_{i,i} \end{vmatrix}$$

1. Montrer que les propriétés suivantes sont équivalentes :
   (a) Il existe une matrice triangulaire supérieure unipotente T (avec uniquement des 1 sur la diagonale) et une matrice diagonale inversible D telles que $D = {}^{\mathrm{t}}TAT$.
   (b) $\Delta_1 \Delta_2 \cdots \Delta_n \neq 0$.
2. Montrer que, sous ces conditions, la signature de A est $(n-q, q)$ où q est le nombre de changements de signe dans la suite $(1, \Delta_1, \Delta_2, \dots, \Delta_n)$.

Exercice 7. Soit Q la forme quadratique sur $\mathbf{R}^4$ définie par $Q(x,y,z,t) = xy - zt$. Soit H un hyperplan de $\mathbf{R}^4$ d'équation $ax + by + cz + dt = 0$, avec $(a,b,c,d) \neq (0,0,0,0)$.

1. Quelle est la signature de Q ?
2. Déterminer le rang de la restriction $Q_{|H}$ en fonction de (a,b,c,d).
3. Quelles sont les valeurs possibles pour la signature de la restriction $Q_{|H}$?

Exercice 8. Soit K un corps de caractéristique différente de 2 et soit Q une forme quadratique sur un espace vectoriel E de dimension 2 sur K.

1. Montrer l'équivalence des propriétés suivantes :
   (a) Q est non dégénérée et admet un vecteur non nul isotrope.
   (b) Il existe une base de H dans laquelle la matrice de Q est
   $$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$
   (c) Q a exactement deux droites vectorielles isotropes.
2. Si Q vérifie les propriétés précédentes, montrer que son groupe spécial orthogonal est isomorphe au groupe multiplicatif de K.

Exercice 9. On considère la conique réelle $\mathcal{C}_\lambda$ qui a pour équation dans un repère orthonormé du plan euclidien $3x^2 - 4xy + \lambda y^2 - 2x = 1$, où λ est un paramètre réel.

1. Déterminer la nature de la conique $\mathcal{C}_\lambda$ en fonction de λ.
2. Décrire complètement $\mathcal{C}_2$.